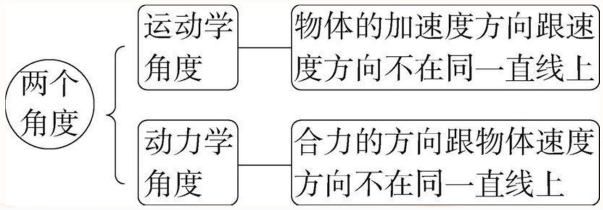
第四章　曲线运动

目录

1　曲线运动　运动的合成与分解

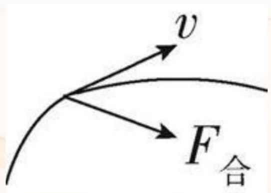
1.1　曲线运动的条件和特征

1.1.1　物体做曲线运动的条件



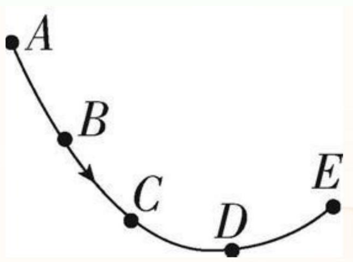
1.1.2　曲线运动的特征

（1）曲线运动是变速运动，加速度必不为 0 。
（2）若做曲线运动的物体所受合力恒定，物体做匀变速曲线运动；若所受合力变化，物体做变加速曲线运动。
（3）曲线运动的轨迹：始终夹在合力方向与速度方向之间，而且向合力的方向弯曲，如图所示。



即练即清

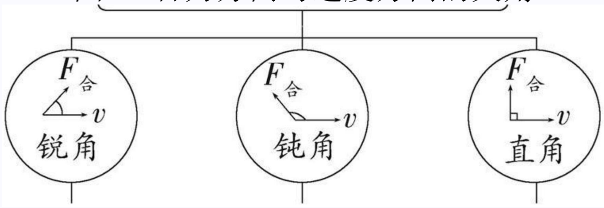
判断正误，正确的打 √、错误的打 ×。
如图所示为质点做匀变速曲线运动的轨迹，且质点运动到 D 点时速度方向与加速度方向恰好相互垂直。



（1）质点经过 C 点时的速率比经过 D 点时的速率大。（　）
（2）质点经过 D 点时的加速度比经过 B 点时的加速度大。（　）
（3）从 B 到 E 的过程中质点的加速度方向与速度方向的夹角先增大后减小。（　）

提分关键 • 规律总结: 曲线运动中速率变化的判断

图 1: 合力方向与速度方向的夹角



物体的速率增大 物体的速率减小 物体的速率不变

1.2 运动的合成与分解

1. 合运动与分运动的重要性质:

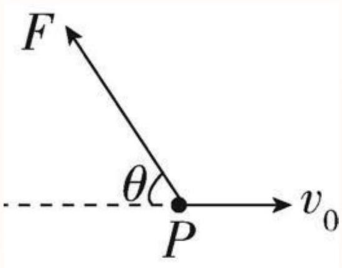
等时性	合运动与分运动、分运动与分运动经历的时间相等，即同时开始、同时进行、同时停止
独立性	各分运动相互独立，不受其他运动的影响，各分运动共同决定合运动的性质和轨迹
等效性	各分运动叠加起来与合运动有完全相同的效果

2. 运算法则: 平行四边形定则。
3. 运动分解的方法: 根据运动的效果分解，也可采用正交分解法。
4. 合运动性质的判断:

两个分运动（不共线）	合运动	
	推断依据	运动性质
两个匀速直线运动	$v_0 \neq 0, a = 0$	匀速直线运动
一个匀速直线运动和	$v_0 \neq 0, a \neq 0$ 且	匀变速
一个匀变速直线运动	v_0 与 a 不共线	曲线运动
两个初速度不为零	v_0 与 a 共线时	匀变速直线运动
的匀变速直线运动	ν_0 与 a 不共线时	匀变速曲线运动
两个初速度为零的匀加速直线运动	$v_0 = 0, a \neq 0$	匀加速直线运动

典例 1

（2024 届山东泰安新泰中学二模）（多选）如图所示，把质量为 m 的小球以大小为 v_0 的速度从空中的 P 点水平向右抛出，同时对小球施加大小为 $\sqrt{3}\mathrm{mg}$ 、方向斜向左上方的恒力 F 作用，$\theta=60°$ 。不计空气阻力，重力加速度为 g 。下列判断正确的是（ ）



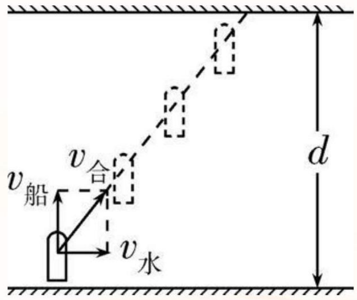
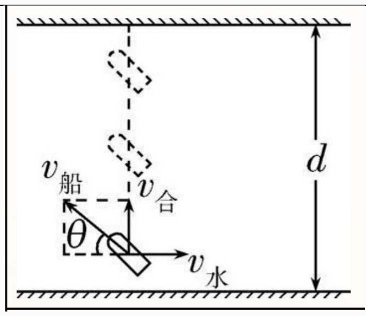
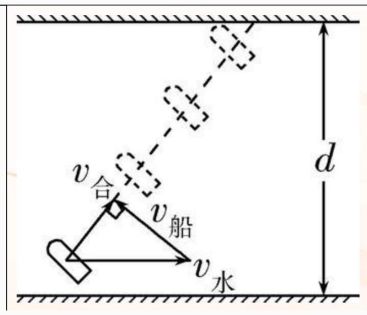
A．小球的加速度大小总为 g

B．小球向右运动的最大位移为 $\frac{\sqrt{3}v_0^2}{4g}$

C．小球经过一段时间会落地

D．小球的最小速度为 $\frac{v_0}{2}$

1.3 小船渡河模型

情况	图示	说明
渡河时间最短		当船头垂直河岸时，渡河时间最短， 最短时间 $t_{\min}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{v}_{船}}$
渡河位移最短		当 $v_水 < v_船$时，满足$v_水 - v_船 \cos\theta = 0$ ， 渡河位移最短，最短渡河位移 $x_{\min} = d$
渡河位移最短		当 $v_水 > v$ 时，船头方向（即$v_船$方向 与 合速度方向垂直，渡河位移最短， 最短渡河位移 $x_{\min}=\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}_{水}}{\mathrm{v}_{船}}$

典例 2

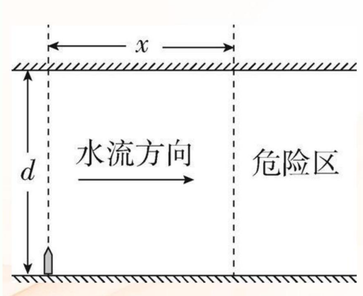
（2024 届四川德阳模拟）如图所示，消防员正在宽度 $d=100\ \mathrm{m}$ 、河水流速 $v_1=5\ \mathrm{m/s}$ 的河流中进行水上救援演练，可视为质点的冲锋舟到下游危险区的距离 $x=75\ \mathrm{m}$ ，其在静水中的速度为 v_2 ，则（　）

A．若冲锋舟在静水中的初速度为 0 ，船头垂直于对岸，以恒定的加速度 $a=0.9\ \mathrm{m/s^2}$ 冲向对岸，则能安全到达对岸

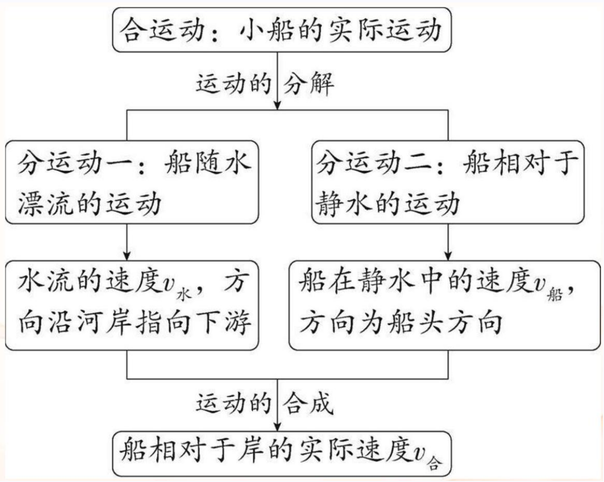
B．若冲锋舟在河流中做匀速直线运动，为了使冲锋舟能安全到达河对岸，冲锋舟在静水中的速度 v_2 不得小于 3 m/s

C．若冲锋舟船头与河岸夹角为 30° 斜向上游且以速度 $v_2=10\ \mathrm{m/s}$ 匀速航行，则恰能到达正对岸

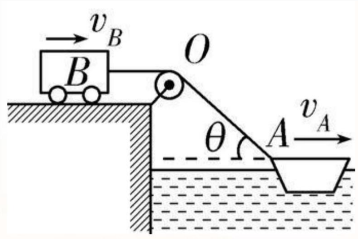
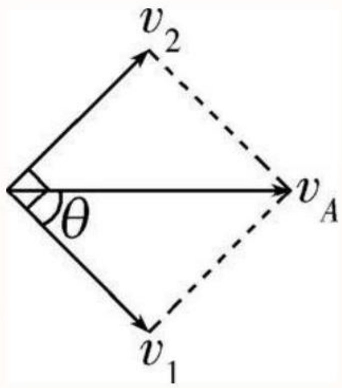
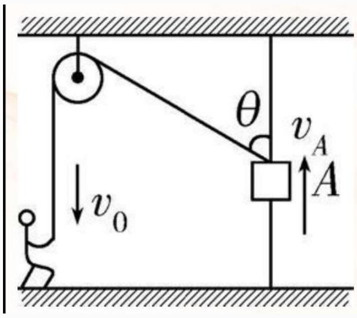
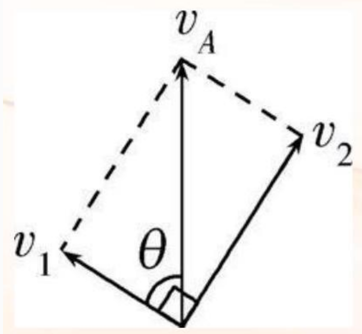
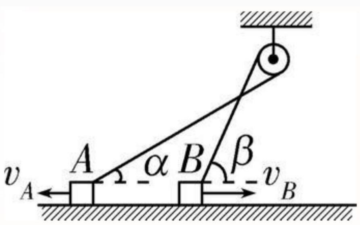
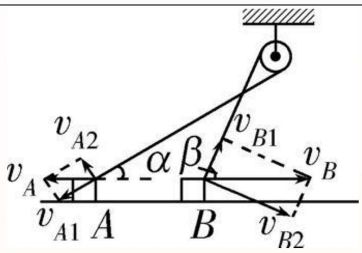
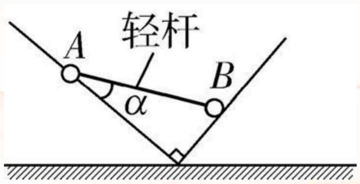
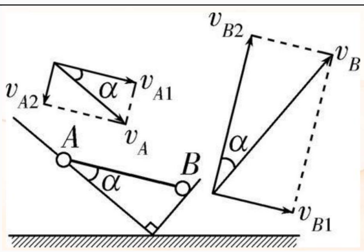
D．冲锋舟以最小的 v_2 匀速航行恰能安全到达对岸所用的时间为 25 s



提分关键 • 方法提升: 分析小船渡河问题的思维流程



1.4 关联速度模型

情境图示	分解图示	定量结论
		$v_B = v_I = v_A \cos\theta$
		$v_0 = v_1 = \nu_A \cos\theta$
		$v_{A1} = v_{B1}$，则 $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$
		$v_{A1} = v_{B1}$，则 $v_A \cos\alpha = v_B \sin\alpha$

典例 3（另：此题还可用微元法来做）

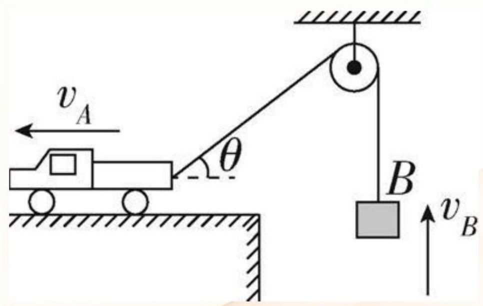
（2024 届山东菏泽模拟）如图所示，在不计滑轮摩擦和绳子质量的条件下，小车 A 在水平外力作用下沿水平地面向左做直线运动，绳子跨过定滑轮拉着物体 B 以速度 v_B 竖直匀速上升，下列判断正确的是（ ）

A．小车 A 做减速直线运动

B．绳子拉力大于物体 B 的重力

C．小车 A 的速度大小可表示为 $v_B\cos\theta$

D．小车 A 受到地面的支持力逐渐变小



提分关键 • 规律总结：明确合速度与分速度

（1）合速度为物体实际运动的速度，一般分解合速度，不分解分速度。

（2）绳、杆两端连接的物体速度大小不一定相等，但沿绳、杆方向的分速度大小一定相等。

（3）合速度大小不一定比分速度大，物理量的分解具有任意性。

（4）此处赠你妙法一招：在约束条件下物体表现给外界看的就是合速度，这时再去判断合速度与其他速度（此时分解后的速度不大于合速度）之间的大小关系（具体看是乘以 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$ 还是除以 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$）。

2 抛体运动

2.1 平抛运动的基本规律

运动图示	以抛出点为坐标原点，以初速度方向为 x 轴正方向，坚直向下为 y 轴正方向，建立坐标系
速度关系	水平方向：$v_x = v_0$ 坚直方向：$v_y = gt$ 合速度大小：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 方向：$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$
位移关系	水平方向：$x = v_0 t$ 坚直方向：$y = \frac{1}{2}gt^2$ 合位移大小：$v = \sqrt{x^2 + y^2}$ 方向：$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{gt}{2x_0}$
轨迹方程	$y = \frac{\mathrm{g}}{2\mathrm{v}_0^2}x^2$
重要推论	$x' = \frac{\mathrm{x}}{2}, \tan\theta = 2\tan\alpha$

即练即清

判断正误，正确的打 $\surd$，错误的打 $\times$

一个小球从空中某点水平抛出，先后经过空中的 A B 两点，不计空气阻力。

（1）小球做非匀变速曲线运动。（ ）

（2）小球经过 A 点的速度大小大于经过 B 点的速度大小。（ ）

（3）A 点到 B 点的速度变化量大小与小球在 A B 间的运动时间成正比。（ ）

（4）连续相等时间 ΔT 内，坚直方向上的位移差不变。（ ）

提分关键 • 规律总结: 平抛运动速度和位移的变化规律

1. 速度的变化规律

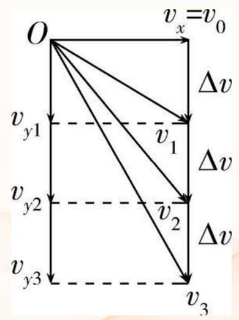
相等时间 ΔT 内的速度变化量相等：$\Delta v = g\Delta T$ ，方向坚直向下，如图所示。

2. 位移的变化规律

（1）相等时间 ΔT 内的水平位移相等：

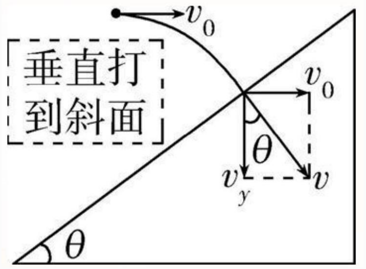
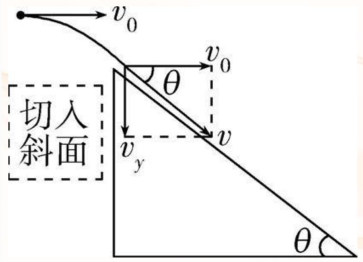
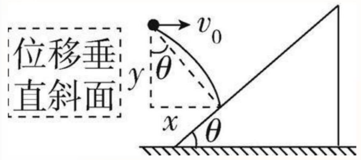
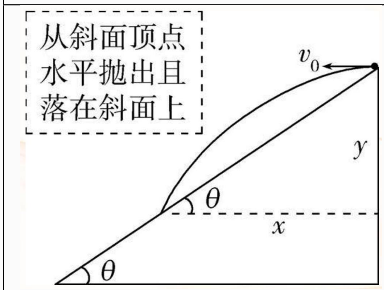
$\Delta x = v_0 \Delta T$ 。

（2）连续相等时间 ΔT 内，坚直方向上的位移差不变，即 $\Delta y = g(\Delta T)^2$ 。

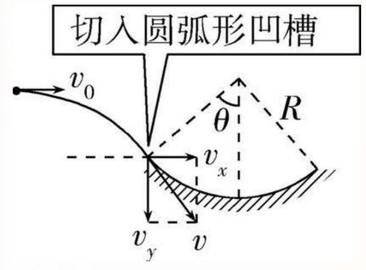
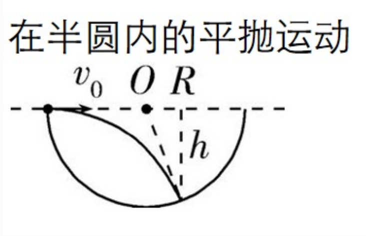
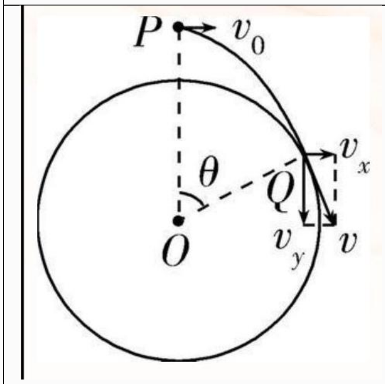


2.2 与斜面或圆弧面有关的平抛运动

2.2.1 斜面约束

<table>
<tr><td>
</td><td>（明确末速度方向）
由 $\tan\theta=\frac{v_0}{v_y}=\frac{v_0}{gt}$ 得 $t=\frac{v_0}{g\tan\theta}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>（明确速度方向）
由 $\tan\theta=\frac{v_y}{v_0}=\frac{gt}{v_0}$ 得
$t=\frac{v_0\tan\theta}{g}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>（明确位移方向）
由 $\tan\theta=\frac{x}{y}=\frac{v_0t}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2v_0}{gt}$
得 $t=\frac{2v_0}{g\tan\theta}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>（明确位移方向）
由 $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=$
$\frac{gt}{2v_0}$ 得 $t=\frac{2v_0\tan\theta}{g}$</td></tr>
</table>

2.2.2 圆弧面约束

	（明确速度方向） 由 $\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{gt}{v_0}$ 得 $t=\frac{v_0\tan\theta}{g}$
	（明确位移关系） 由 $R+\sqrt{R^2-h^2}=V_0t$ 得 $t=\frac{R+\sqrt{R^2-h^2}}{v_0}$
	（明确速度方向） 由 $\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{gt}{v_0}$ 得 $t=\frac{v_0\tan\theta}{g}$

典例 1

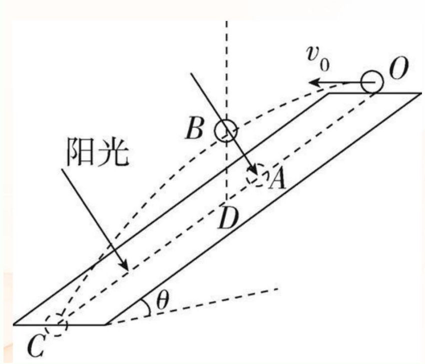
（2024 届江苏泰州一模）如图所示，阳光垂直照射到斜面上，在斜面顶端把一小球水平抛出，小球刚好落在木板底端。B 点是运动过程中距离斜面最远处，A 点是小球在阳光照射下小球经过 B 点的投影点。不计空气阻力，则（ ）

A．小球在斜面上的投影做匀速运动

B．OA 与 AC 长度之比为 1 ：3

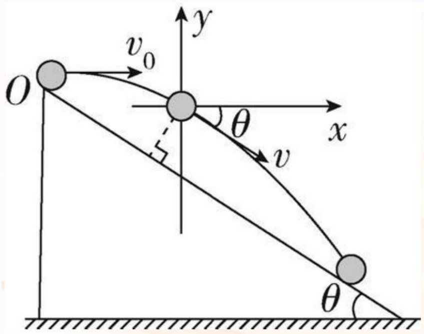
C．若 D 点在 B 点的正下方，则 OD 与 DC 长度相等

D．减小小球抛出的速度，小球可能垂直落到斜面上



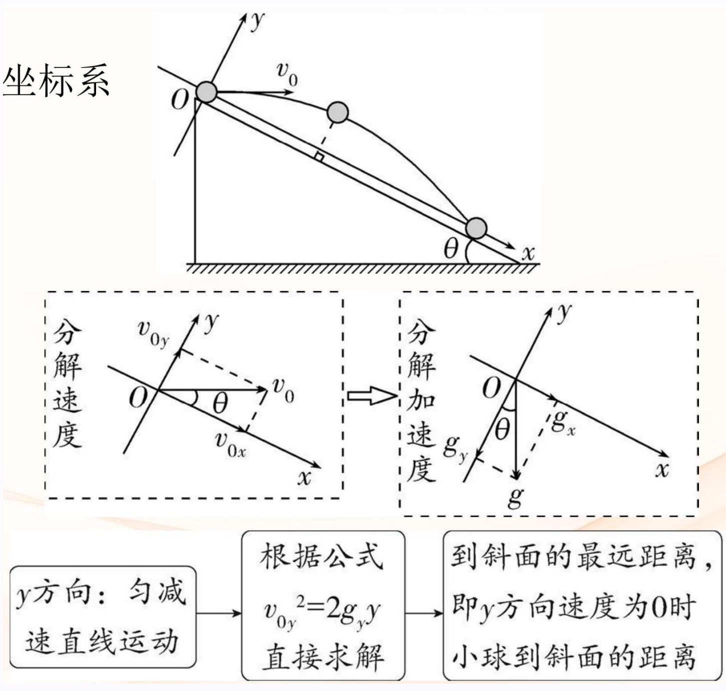
提分关键 • 方法提升: 小球离斜面最大距离分析

（1）沿水平方向、竖直方向建坐标系



速度与水平方向夹角为 θ 时，离斜面距离最大，此时 $\tan\theta = \frac{gt}{v_0}$ 。

（2）沿斜面和垂直斜面建坐标系

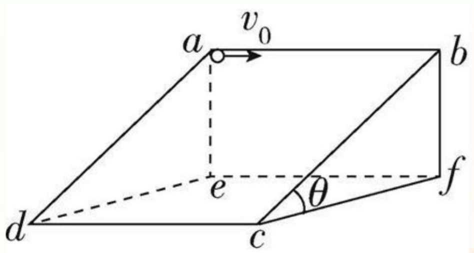


2.3 类平抛运动的分析

运动图示	以抛出点为坐标原点，以初速度方向为 x 轴正方向，合力方向为 y 轴正方向，建立坐标系	
速度关系	合速度：	大小：$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ 方向：$\tan\theta=\frac{v_y^2}{v_x}=\frac{at}{v_0}$
位移关系	合位移：	大小：$s=\sqrt{x^2+y^2}$ 方向：$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{at}{2v_0}$

典例 2

（2024 届河南商丘三模）如图所示，倾角为 $\theta=30^\circ$ 的光滑斜面体固定在水平地面上，斜面 $abcd$ 为正方形。一小球从斜面的顶点 a 处以大小 $v_0=3.0\ \mathrm{m/s}$ 的初速度平行 ab 方向抛出，小球恰好从 bc 边的中点飞出。已知重力加速度 g 取 $10\ \mathrm{m/s^2}$ ，求斜面 $abcd$ 的边长。

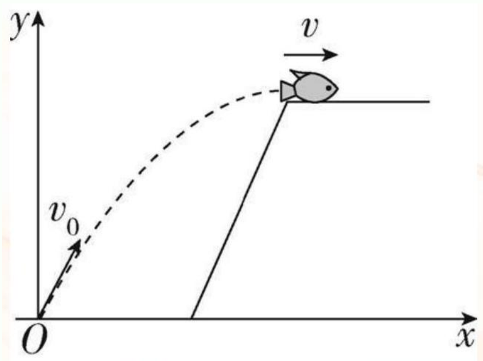


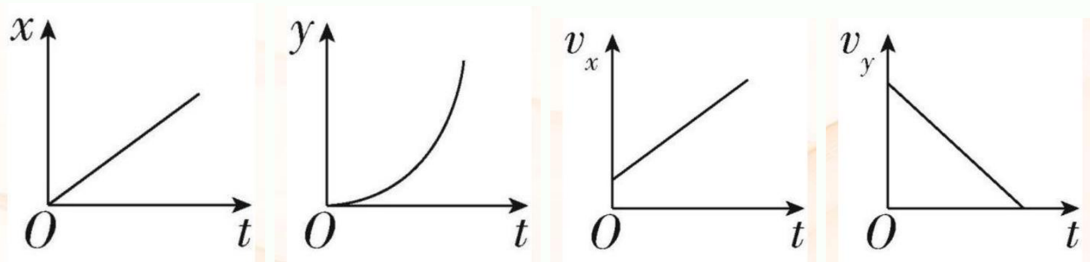
2.4 斜抛运动

运动图示	以抛出点为坐标原点 O ，水平向右为 x 轴的正方向，竖直向上为 y 轴的正方向，建立平面直角坐标系。
水平方向	速度 $v_{\mathrm{x}}=v_{0\mathrm{x}}=v_0\cos\theta$ 位移 $x=v_{0\mathrm{x}}\mathrm{t}=(v_0\cos\theta)\,t$
竖直方向	速度 $v_{\mathrm{y}}=\mathrm{v}_{0y}-gt=v_0\sin\theta-gt$ 位移 $y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2=(v_0\sin\theta)\,t-\frac{1}{2}gt^2$
飞行时间	$t_{总}=\frac{2\mathrm{v}_0\sin\theta}{\mathrm{g}}$
射高	$H_{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{v}_0{}^2\sin^2\theta}{2\ \mathrm{g}}$
射程	$x_{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{v}_0^2\sin 2\theta}{\mathrm{g}}$ （若 v_0 一定，当 $\theta=45^\circ$ 时，x_{m} 最大）

典例 3

（2024 江西，8,6 分）（多选）一条河流某处存在高度差，小鱼从低处向上跃出水面，冲到高处。如图所示，以小鱼跃出水面处为坐标原点，x 轴沿水平方向，建立坐标系，小鱼的初速度为 v_0 ，末速度 v 沿 x 轴正方向。在此过程中，小鱼可视为质点且只受重力作用。关于小鱼的水平位置 x 、竖直位置 y 、水平方向分速度 v 和坚直方向分速度 v_y 与时间 t 的关系，下列图像可能正确的是（　）

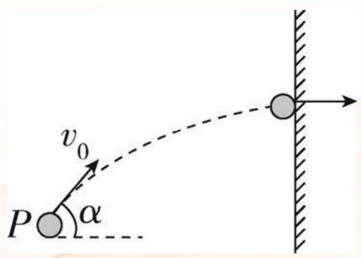




高考变式（由定态到动态）

（多选）如图所示，将一个小球从 P 点以大小为 v_0 的初速度斜向上抛出，初速度与水平方向的夹角为 α ，小球恰好能垂直打在墙面上，不计小球的大小，不计空气阻力，重力加速度大小为 g ，若改变小球从 P 点抛出的初速度，则关于小球从 P 点抛出到打在墙面上的过程，下列说法正确的是（　）

A．仅将 α 变小，小球运动的时间变长
B．仅将 α 变小，小球仍可能垂直打在墙面上
C．仅将 v_0 变大，小球运动的时间变短
D．将 ν_0 变大，同时将 α 变小，小球仍可能垂直打在墙面上



2.4.1 提分关键 • 方法提升: 逆向思维处理斜抛运动

利用斜上抛运动至最高点速度水平的特点，可以将斜抛运动从最高点分段研究，前半段相当于反向的平抛运动，后半段相当于平抛运动。

2.5 微专题 1 抛体运动中的综合问题

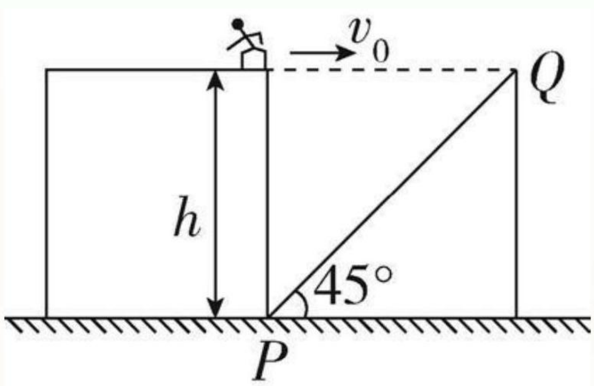
2.5.1 题型 1 抛体运动中的临界、极值问题

1. 抛体运动中的临界问题
   (a) 抛体运动的临界问题的两种常见情境
      i. 物体有最大位移、最小位移、最大初速度、最小初速度等。
      ii. 物体的速度方向恰好为某一方向。
   (b) 处理抛体运动的临界问题的关键
      i. 关于临界条件的关键信息："恰好不出界""刚好飞过壕沟""速度方向恰好与斜面平行""速度方向与圆周相切"等。
      ii. 解题关键：从实际出发寻找临界点，画出物体运动的草图，确定临界条件。
2. 抛体运动中的极值问题抛体运动的极值问题主要是利用抛体运动规律和几何关系，列出关系式，得到相关的函数关系，利用数学方法得到最大值或最小值的问题。常见的数学方法有二次函数求极值、均值不等式求极值、导数求极值等。极值问题中往往蕴含临界问题。

典例 1

某运动员从滑雪跳台以不同的速度 v_0 水平跳向对面倾角为 $45°$ 的斜坡（如图所示），已知跳台的高度为 h ，不计空气阻力，重力加速度为 g ，则该运动员落到斜坡上的最小速度为（ ）

A. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)gh}$ B. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)gh}$ C. $\sqrt{(\sqrt{5}-1)gh}$ D. $\sqrt{(\sqrt{6}-1)gh}$



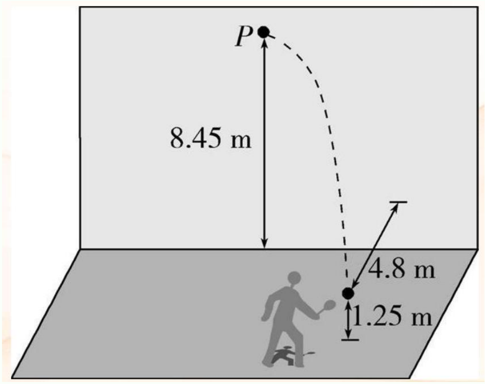
2.5.2 题型 2 立体空间中的抛体运动问题

处理三维空间的抛体运动问题，核心思想为建立合适的坐标系，将三维问题降为二维问题，将立体空间问题转化为平面问题，结合合成与分解的思想 " 化曲为直 "，进行求解。

典例 2

（2022 山东，11，4 分）（多选）如图所示，某同学将离地 1.25 m 的网球以 13 m/s 的速度斜向上击出，击球点到竖直墙壁的距离 4.8 m 。当网球竖直分速度为零时，击中墙壁上离地高度为 8.45 m 的 P 点。网球与墙壁碰撞后，垂直墙面速度分量大小变为碰前的 0.75 倍，平行墙面的速度分量不变。重力加速度 g 取 $10\ \mathrm{m/s^2}$ ，网球碰墙后的速度大小 v 和着地点到墙壁的距离 d 分别为（ ）

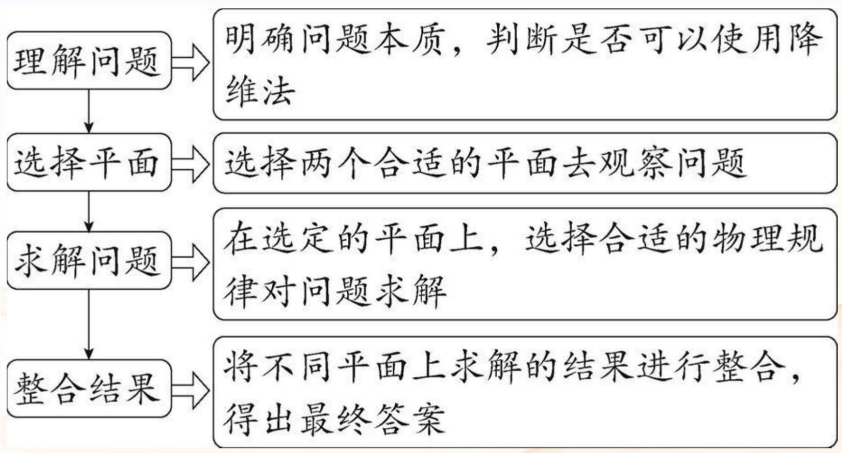
A．$v=5$ m/s B．$v=3\sqrt{2}$ m/s C．$d=3.6$ m D．$d=3.9$ m



高考变式（空间几何关系）

在典例 2 情景中，试计算出网球着地点与击出点之间的距离。

提分关键 • 方法提升：降维法一般步骤



2.5.3 题型 3 抛体运动中的相遇问题

1. 常见类型
   常见的有平抛与直线运动相遇、平抛与平抛运动相遇、平抛与竖直上抛相遇、平抛与斜上抛相遇等。
2. 解题方法
   两物体相遇即二者同一时刻到达空间同一位置。利用运动的合成与分解将二维的追及相遇问题转化为一维的追及相遇问题，根据运动过程图列出相应的速度关系、位移关系和时间关系。

典例 3

（2023 湖南，2，4 分）如图（a），我国某些农村地区人们用手抛撒谷粒进行水稻播种。某次抛出的谷粒中有两颗的运动轨迹如图（b）所示，其轨迹在同一竖直平面内，抛出点均为 O，且轨迹交于 P 点，抛出时谷粒 1 和谷粒 2 的初速度分别为 v_1 和 v_2，其中 v_1 方向水平，v_2 方向斜向上，忽略空气阻力，关于两谷粒在空中的运动，下列说法正确的是（ ）

A．谷粒 1 的加速度小于谷粒 2 的加速度

B．谷粒 2 在最高点的速度小于 v_1

C．两谷粒从 O 到 P 的运动时间相等

D．两谷粒从 O 到 P 的平均速度相等

图 2: 图（a）

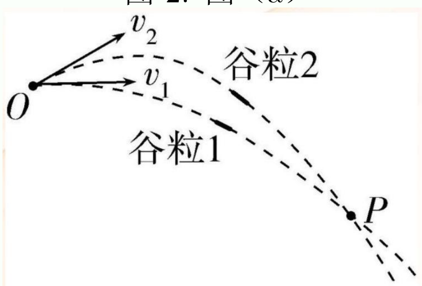
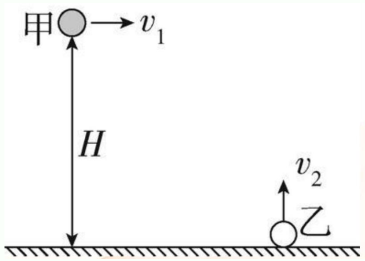


图 3: 图（b）

高考变式（平抛与坚直上抛相遇）

（多选）如图，物体甲从高 H 处以速度 v_1 平抛，同时乙从水平方向距甲 s 处由地面以初速度 v_2 坚直上抛，不计空气阻力，重力加速度为 g ，则（ ）

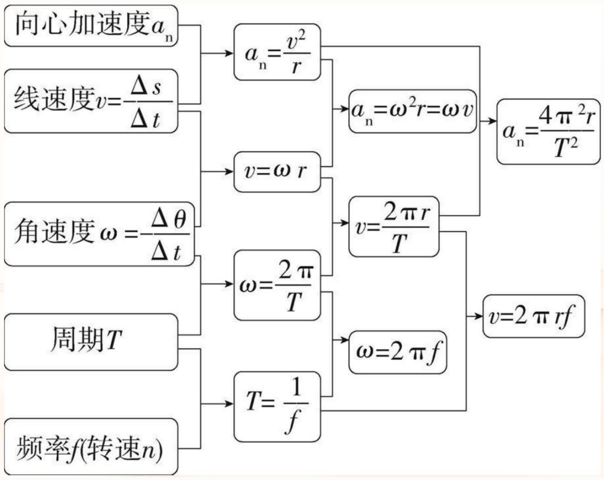
A．若两物体在空中能够相遇，从抛出到相遇的时间为 $\frac{H}{v_2}$
B．若要物体乙在上升过程中与甲相遇，必须满足 $\frac{s}{v_1}=\frac{H}{v_2}, v_2>\sqrt{gH}$
C．若要物体乙在下降过程中与甲相遇，必须满足 $\frac{s}{v_1}=\frac{H}{v_2}, v_2>\frac{\sqrt{gH}}{2}$
D．若相遇点离地高度为 $\frac{H}{2}$ ，则 $v_2=\sqrt{gH}$



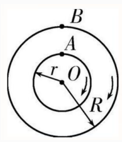
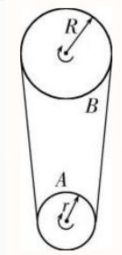
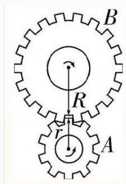
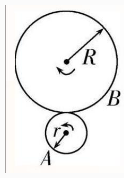
3 圆周运动

3.1 圆周运动的运动学问题

3.1.1 描述圆周运动的物理量间的关系



3.1.2 常见的传动方式

	共轴传动	皮带传动	齿轮传动	摩擦传动
传动装置图				
基本特征	角速度相同	轮缘或啮合处线速度大小相等		
定量关系	$\omega_A=\omega_B$ $v_A:v_B=r:R$ $a_A:a_B=r:R$	$\nu_A=\nu_B,\omega_A:\omega_B=R:r$ $a_A:a_B=R:r$ （齿数比等于半径比）		

典例 1

（2024 届广东三校开学考）如图甲，绞车记载于北宋曾公亮和丁度创作的《武经总要》，其原理如图乙，将一根圆轴削成同心而半径不同的大小辘轳，其上绕以绳索，绳下加动滑轮，滑轮下挂上重物，人转动把手带动辘轳旋转便可轻松将重物吊起。a b 分别是大小辘轳边缘上的两点。在起吊过程中，下列说法正确的是（　）

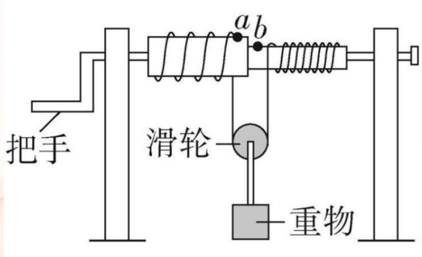
A．a 点的线速度等于 b 点的线速度

B．人对把手做的功等于重物机械能的增加量

C．滑轮对重物的力与重物的重力是一对作用力与反作用力

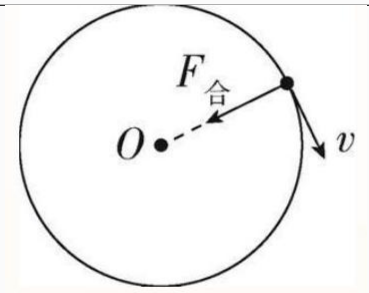
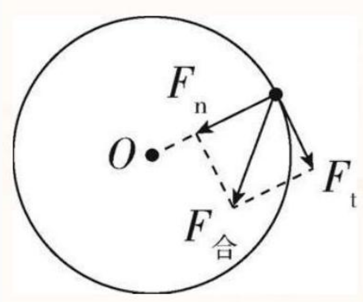
D．图乙中滑轮会顺时针转动


甲



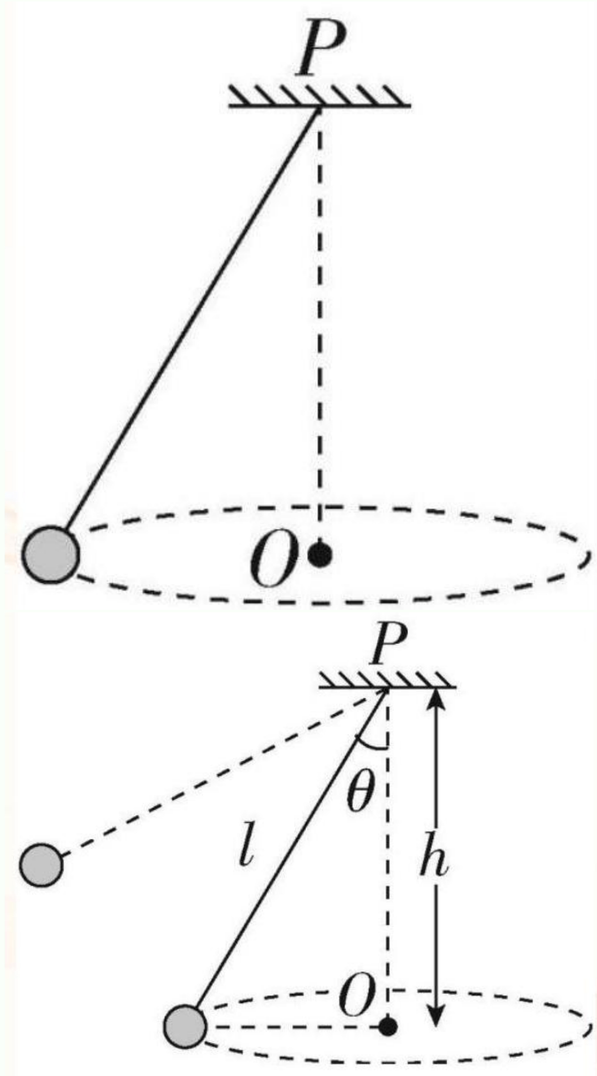
乙

3.2 圆周运动的动力学问题

	图像	合力作用效果
匀速圆周		所受合力提供向心力 $F_{合} = ma_n = m\frac{v^2}{r} = mr^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2r} = m\omega v$
变速圆周		F_1 改变速度大小； F_n 提供向心力，改变速度方向
离心或向心	$F = 0$	$F = 0$ 时，物体沿切线方向飞出； $0 < F < m\omega^2 r$ 时，物体逐渐远离圆心； $F > m\omega^2 r$ 时，物体逐渐靠近圆心

教考衔接

典例 2（人教版必修二 P_{42}，T_5 改编）如图 1 所示，质量为 m 的小球用细绳悬于 P 点，使小球在水平面内做匀速圆周运动，重力加速度为 g ，小球可视为质点。



（1）（回归教材）（1）若悬挂小球的绳长为 l ，小球做匀速圆周运动的角速度为 ω ，绳对小球的拉力 F 有多大？

（2）如图 2 所示，若保持绳长不变，改变轨迹圆的圆心 O 到悬点 P 的距离 h ，增大细绳与竖直方向的夹角 θ ，则小球做匀速圆周运动的角速度 ω 将如何变化？

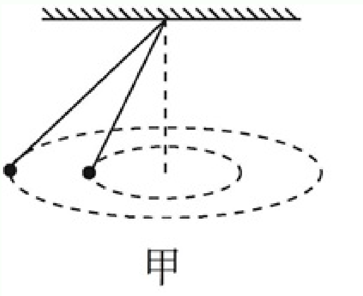
（2）（情境变式）图甲是两个圆锥摆，两摆球运动轨道在同一个水平面内，图乙是完全相同的两个小球在内壁光滑的倒圆锥内做匀速圆周运动。下列说法正确的是（　）

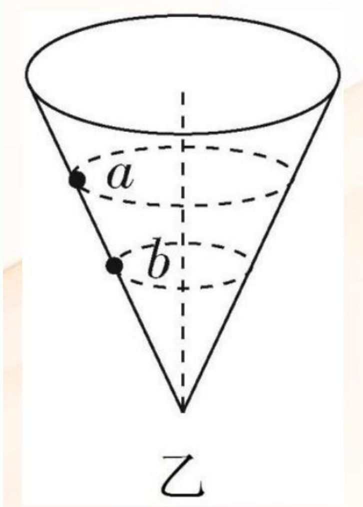
A．甲图中两摆球的运动周期相等

B．甲图中两摆球的线速度大小相等

C．乙图中两个小球的线速度大小相等

D．乙图中两个小球的角速度大小相等



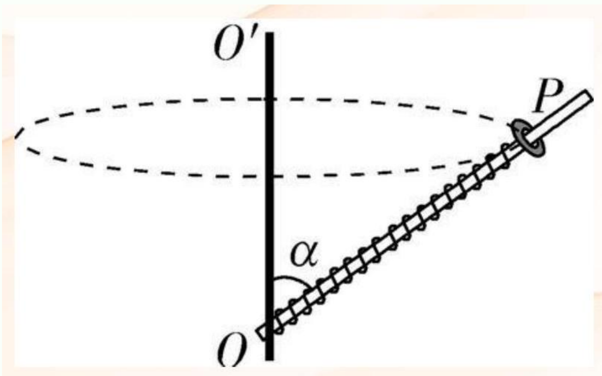


（3）（链接高考）（2023 福建，15,12 分）一种离心测速器的简化工作原理如图所示。细杆的一端固定在竖直转轴 OO' 上的 O 点，并可随轴一起转动。杆上套有一轻质弹簧，弹簧一端固定于 O 点，另一端与套在杆上的圆环相连。当测速器稳定工作时，圆环将相对细杆静止，通过圆环的位置可以确定细杆匀速转动的角速度。已知细杆长度 $l = 0.2\ \mathrm{m}$ ，杆与竖直转轴的夹角 α 始终为 $60°$ ，弹簧原长 $x_0 = 0.1\ \mathrm{m}$ ，弹簧劲度系数 $k = 100\ \mathrm{N/m}$ ，圆环质量 $m = 1\ \mathrm{kg}$ ；弹簧始终在弹性限度内，重力加速度大小取 $10\ \mathrm{m/s^2}$ ，摩擦力可忽略不计。

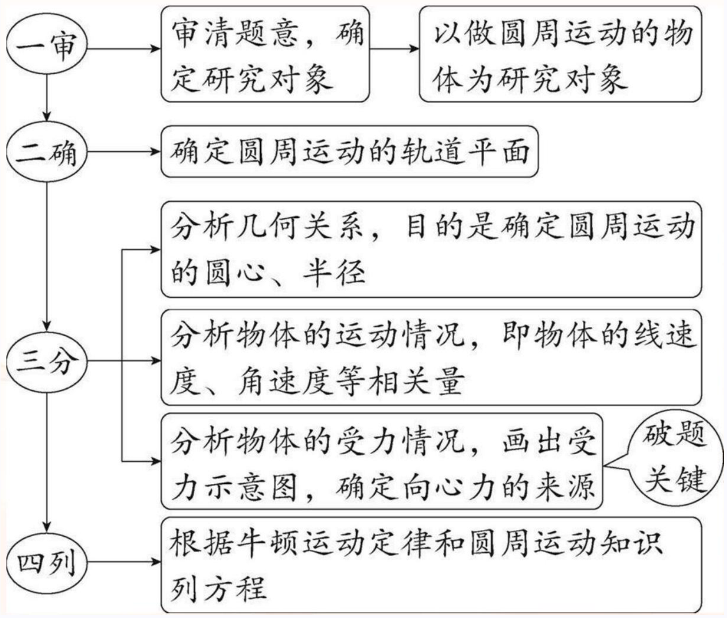
i. 若细杆和圆环处于静止状态，求圆环到 O 点的距离；

ii. 求弹簧处于原长时，细杆匀速转动的角速度大小；

iii. 求圆环处于细杆末端 P 时，细杆匀速转动的角速度大小。

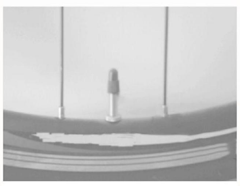


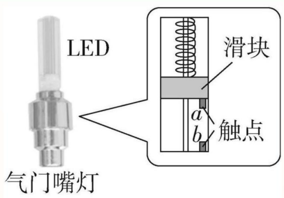
提分关键 • 方法提升: 圆周运动中动力学问题的分析思路



典例 3

（2023 届山东青岛一模）很多人在山地自行车上安装了气门嘴灯，夜间骑车时犹如踏着风火轮，格外亮眼。如图甲是某种自行车气门嘴灯，气门嘴灯内部开关结构如图乙所示：弹簧一端固定，另一端与质量为 m 的小滑块（含触点 a ）连接，当触点 $a\,b$ 接触，电路接通使气门嘴灯发光，触点 b 位于车轮边缘。车轮静止且气门嘴灯在最低点时触点 $a\,b$ 距离为 L ，弹簧劲度系数为 $\frac{mg}{L}$ ，重力加速度大小为 g ，自行车轮胎半径为 R ，不计开关中的一切摩擦，滑块和触点 $a\,b$ 均可视为质点。


甲



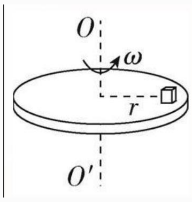
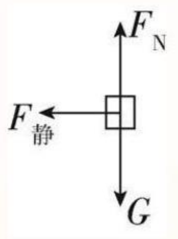
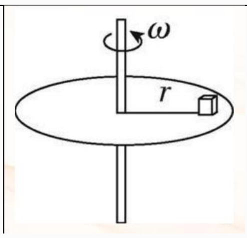
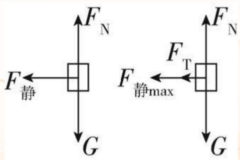
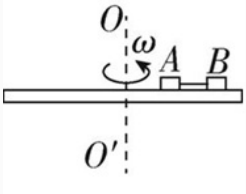
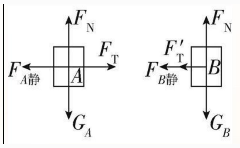
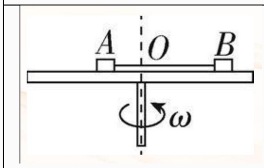
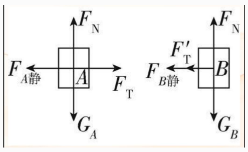
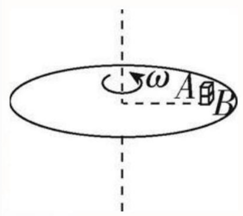
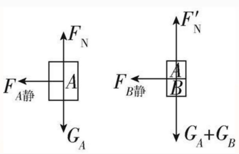
乙

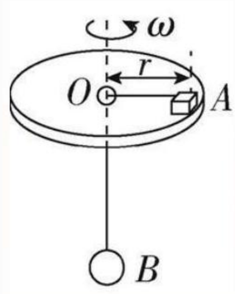
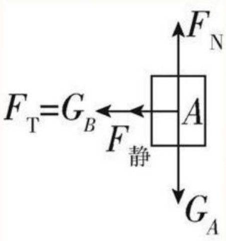
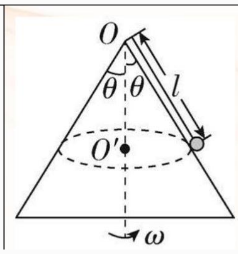
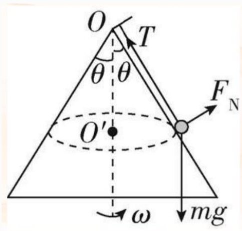
（1）若自行车匀速行驶过程中气门嘴灯可以一直亮，求自行车行驶的最小速度；

（2）若自行车以 $\sqrt{2gR}$ 的速度匀速行驶，求车轮每转一圈，气门嘴灯的发光时间。

3.3 微专题 2 圆周运动的临界、极值问题

3.3.1 题型 1 水平面内圆周运动的临界、极值问题

情境	受力分析	临界状态对应规律
		初始有 $F_{静}=m\omega^2r$ 临界状态：静摩擦力达到最大， 有 F 静 $max=m\omega_{1\,监}^2r$
		初始有 $F_{静}=m\omega^2r$ 临界状态：静摩擦力达到最大， 有 F 静 $\max=m\omega_{1\,监}^2r$ 随着 ω 继续变大，有 $F_{静\ \max}+F_T=m\omega^2r$ ，F1 从 0 开始增大
		临界状态 1：当 $F_{B\ 静}=F_{B\max}$ 时， 绳子上将要产生拉力 临界状态 2：当 $F_{A\ 静}=F_{A\max}$ 时， A B 将要发生相对滑动
		A、B 开始滑动的临界状态： $F_{B\ \max}+F_T'=m_B\omega^2r$ $F_T-F_{A\ \max}=m_A\omega^2r$
		通过比较两接触面的动摩擦因数 μ 来判定谁先滑动，动摩擦因数小的先滑动

		临界状态：当 $\mathrm{F}_T+\mathrm{F}_{静max}=\mathrm{m_A}\omega^2\mathrm{r}$ 时，A 物体即将相对圆盘向外滑动
		临界状态：当 $\mathrm{F}_N=0$ ，即 $\omega=\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}\cos\theta}}$ 时，小球即将 " 飘起来 "

典例 1

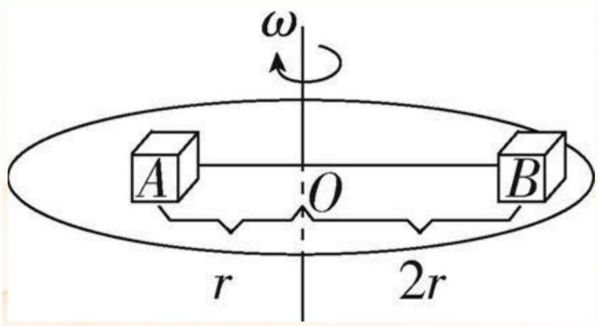
（2023 届山东泰安肥城模拟）（多选）如图所示，水平圆盘可绕坚直轴转动，沿直径方向放着用细线相连的质量均为 m 的物体 A 和 B ，它们分居圆心两侧，与圆心距离分别为 $R_A=r,R_B=2r,A$ 和 B 与圆盘间的动摩擦因数分别为 μ 和 $\frac{\mu}{2}$ ，圆盘静止时细线刚好伸直且无张力。设最大静摩擦力等于滑动摩擦力，重力加速度为 g ，现让圆盘从静止开始缓慢加速，则（　）

A．当 $\omega<\sqrt{\frac{\mu g}{4r}}$ 时，细线中没有张力

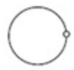
B．当 $\omega=\sqrt{\frac{\mu g}{2r}}$ 时，物体 A 受到的摩擦力指向圆心

C．当 $\omega=\sqrt{\frac{3\mu g}{2r}}$ 时，两物体刚好不滑动

D．当两物体刚好不滑动时烧断细线，A 仍相对圆盘静止，B 将做离心运动



3.3.2 题型 2 竖直面内圆周运动的临界、极值问题

		绳球模型		杆球模型		
图示						
		绳连球	轨道内球	杆连球	管内球	大环套小球
共同特征		绳或轨只能提供指向圆心的力		杆或轨的力既可指向圆心，也可背离圆心		
现实典例		凹形桥、水流星、飞机俯冲等		打夯机		
由牛顿第二定律列方程	最高点	$mg+F_T=m\frac{v^2}{R}$		拉力	$mg+F_{杆}=m\frac{v^2}{R}$	
				支持力	$mg-F_{杆}=m\frac{v^2}{R}$	
	最低点	$F_T-mg=m\frac{v^2}{R}$		$F_{杆}-mg=m\frac{v^2}{R}$		
	最高点速度	若 $F_T=0$，即 $mg=m\frac{v^2}{R}$，$v=\sqrt{gR}$		若 $F_{杆}=0$，$mg=m\frac{v^2}{R}$，$v=\sqrt{gR}$		
				若 $F_{杆}$ 背离圆心，$mg-F_{杆}=m\frac{v^2}{R}$，$0\leqslant v<\sqrt{gR}$		
		$F_T\neq0$，即 $mg+F_T=m\frac{v^2}{R}$，$v>\sqrt{gR}$		若 $F_{杆}$ 指向圆心，$F_{杆}+mg=m\frac{v^2}{R}$，$v>\sqrt{gR}$		
最高点速度范围		$v\geqslant\sqrt{gR}$（$v<\sqrt{gR}$，绳球模型中球脱轨）		$v\geqslant0$（杆球模型不存在脱轨情况）		
最高点临界速度（恰好、刚好）		$v_{临}=\sqrt{gR}$（最高点速度不能为 0）		$v_{临}=0$（最高点速度可以为 0）		

教考衔接

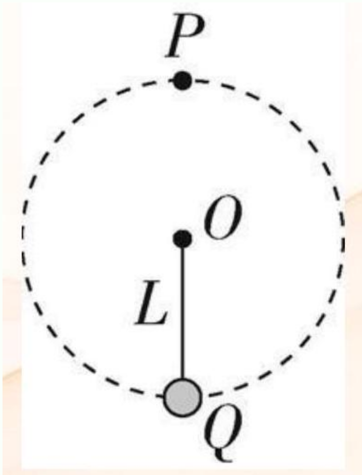
典例 2 （2024 届江苏扬州公道中学月考）如图所示，长为 L 的轻绳一端拴一个质量为 m 的小球，另一端可绕 O 在竖直平面内自由转动，已知小球通过最高点 P 时速度为 $\sqrt{gL}$，g 为重力加速度，不计一切阻力，小球可视为质点。则（　）

A．小球运动到最低点 Q 时的速度大小为 $\sqrt{6gL}$

B．小球运动到最低点 Q 时的速度大小为 $\sqrt{5gL}$

C．在最高点 P 小球受到绳的拉力不为零

D．在最高点 P 小球受到绳的拉力为 mg



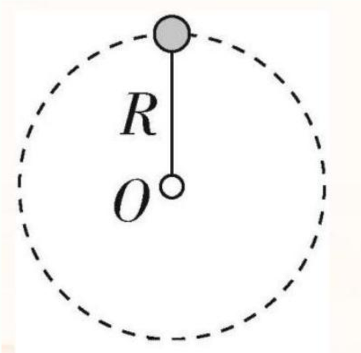
进阶 1（杆球模型）（多选）如下左图所示，轻杆一端固定在 O 点，另一端固定一小球，现让小球在竖直平面内做半径为 R 的圆周运动。小球运动到最高点时，杆与小球间的弹力大小为 F_{N} ，小球在最高点的速度大小为 v ，其 $F_{\mathrm{N}}-v^2$ 图像如下右图所示，不计一切阻力。则（　）

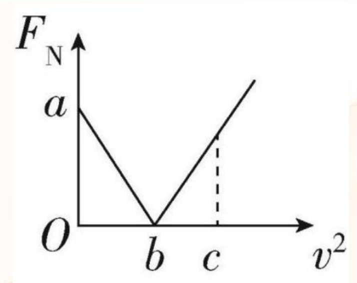
A．小球的质量为 $\frac{bR}{a}$

B．当地的重力加速度大小为 $\frac{b}{R}$

C．当 $v^2=c$ 时，在最高点杆对小球的弹力方向向上

D．当 $v^2=b$ 时，小球处于完全失重状态





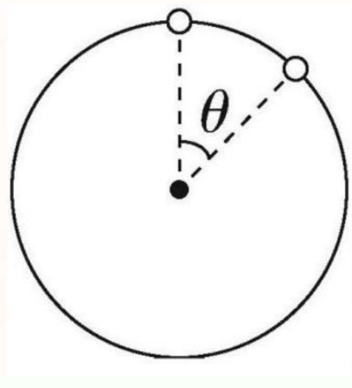
进阶 2（圆环模型）（多选）如下左图所示，质量为 0.2 kg 的小球套在竖直固定的光滑圆环上，并在圆环最高点保持静止。受到轻微扰动后，小球由静止开始沿着圆环运动，一段时间后，小球与圆心的连线转过 θ 角度时，小球的速度大小为 v, v^2 与 $\cos\theta$ 的关系如下右图所示，g 取 10 m/s^2 。则（　）

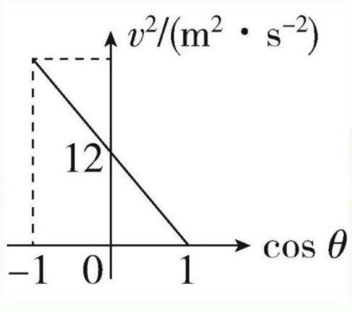
A．圆环半径为 0.6 m

B．$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，小球所受合力为 4 N

C．$0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 过程中，圆环对小球的作用力一直增大

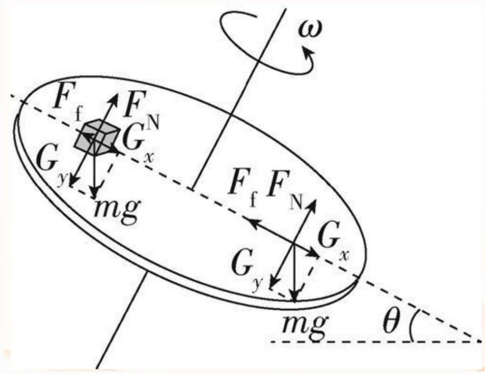
D．$0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 过程中，圆环对小球的作用力先减小后增大





3.3.3 题型 3 斜面上圆周运动的临界、极值问题

1．特殊位置受力分析



2．临界状态分析

物块相对转盘即将滑动的临界位置在最低点，物块运动过程中在最低点有 $F_{\mathrm{f}}-mg\sin\theta=m\omega^2r$ ，当 $F_{\mathrm{f}}=\mu mg\cos\theta$ 时转盘角速度 ω 达到最大值，此时 $\mu mg\cos\theta-mg\sin\theta=m\omega_{\max}^2r$ ，可得

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{g(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{r}}$$

典例 3

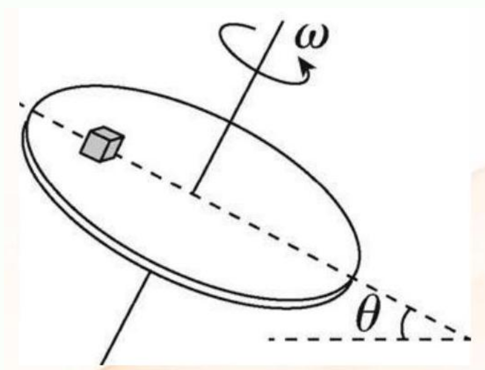
（2024 届湖北华师一附月考）（多选）转盘游戏深受人们喜爱，现将其简化为如图所示模型。倾角为 $\theta=30^\circ$ 的圆盘绕垂直于盘面且过圆心的轴做匀速圆周运动，盘面上距离轴 r 处有一可视为质点的小物块与圆盘始终保持相对静止，物块质量为 m ，与盘面间的动摩擦因数为 μ ，重力加速度为 g ，圆盘的角速度为 $\omega=\sqrt{\frac{2g}{3r}}$ ，最大静摩擦力等于滑动摩擦力，则 (　)

A．μ 的最小值为 $\frac{7}{9}\sqrt{3}$

B．物块从最低点第一次转到最高点的过程中，圆盘对物块的冲量大小为 $\frac{2}{3}m\sqrt{6gr}$

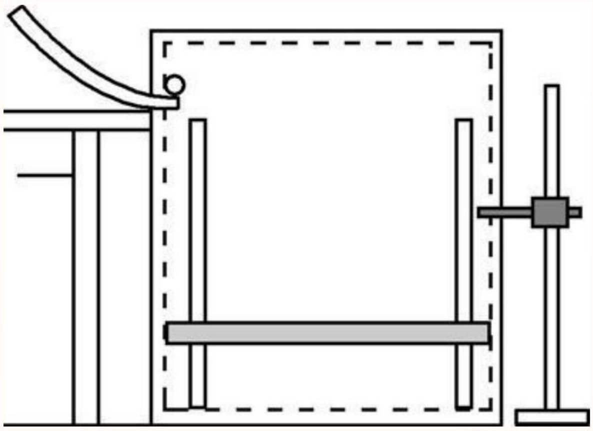
C．物块运动到任意关于转轴对称的两点时受到的摩擦力的大小分别为 f_1 f_2 ，一定有 $f_1^2+f_2^2>m^2g^2$

D．ω 增大，物块在最高点受到的摩擦力一定增大



4 实验 1 探究平抛运动的特点

4.1 实验原理及装置图



把钢球从同一位置由静止释放，钢球沿着斜槽滚下并被水平抛出，落在挡板上，通过复写纸在竖直的坐标纸上留下印迹，逐次下调挡板，重复以上操作得到钢球的一系列运动点迹。

4.2 操作要领及注意事项

1. 装置调节有什么要求：平板必须处于竖直面内；斜槽末端的切线必须水平。
2. 如何进行实验操作：小球每次必须从斜槽上同一位置由静止释放；开始滚下的位置高度要适中，以使小球做平抛运动的轨迹由坐标纸的左上角一直到达右下角为宜。
3. 如何进行作图：坐标原点不是槽口的端点，应是小球出槽口时小球球心在平板上的投影点；点迹要用平滑曲线连接（不能用折线）。

4.3 数据处理

1.判断是否为抛物线:在轨迹曲线上取几点,读出各点坐标值,若各点坐标满足 $y = ax^2, a$ 为一特定值，说明轨迹为抛物线。

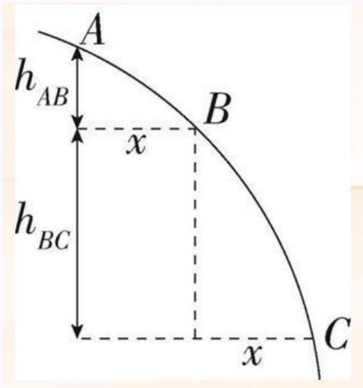
2. 计算平抛运动的初速度

（1）平抛轨迹完整（即含有抛出点）

在轨迹上任取一点，测出该点与坐标原点的水平距离 x 及竖直距离 y ，就可求出初速度 v_0 。$x = v_0 t, y = \frac{1}{2}gt^2$ ，故 $v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$ 。

（2）平抛轨迹残缺（即无抛出点）

在轨迹上任取三点 A B C（如图所示），使 A B 间及 B C 间的水平距离相等，设为 x，由平抛运动的规律可知，在 A B 间运动与在 B C 间运动所用时间相等，设为 t，重力加速度为 g，则 $\Delta h = h_{BC} - h_{AB} = gt^2$，所以 $t = \sqrt{\frac{h_{BC}-h_{AB}}{g}}$，初速度 $v_0 = \frac{x}{t} = x\sqrt{\frac{g}{h_{BC}-h_{AB}}}$ 。



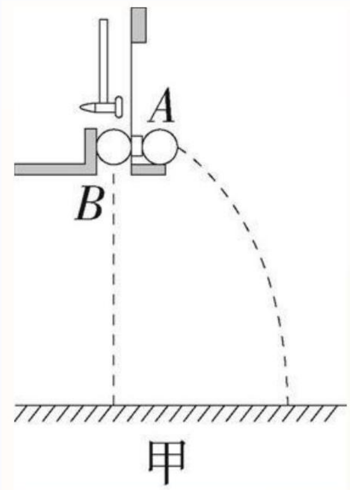
4.4 误差分析及改进措施

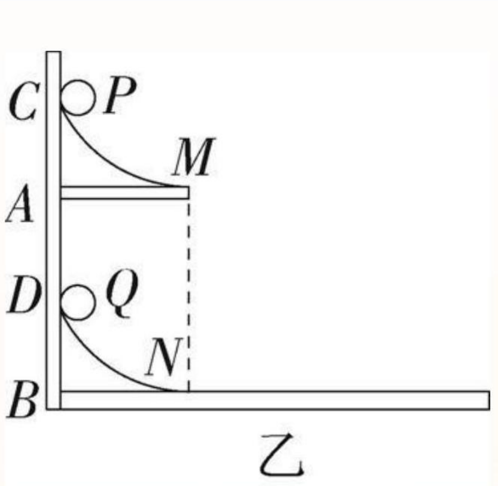
1．钢球做平抛运动时受空气阻力影响。选用质量大、体积小、表面光滑的钢球可以减小因此产生的误差。

2．钢球每次滚下的初位置不完全相同；斜槽末端切线不完全水平；建立坐标系时，坐标原点的选取有些许偏差。规范进行实验操作，可以减小因此产生的误差。

4.5 其他实验方案

方案一 对比实验法





1．采用如图甲所示的装置，用小锤击打弹性金属片，金属片把 A 球沿水平方向弹出，同时 B 球被松开而自由下落，判断相同的两球是否同时落地（听声音判断）。若两球同时落地，说明平抛运动的竖直分运动为自由落体运动。

2．采用如图乙所示的装置，两个相同的弧形轨道 M 、N ，其中 N 的末端可看成与光滑的水平板相切，使相同的两小球以相同的初速度 v_0 同时分别从轨道 M N 的末端射出。若两球在 P 球落地时相碰，说明平抛运动的水平分运动为匀速直线运动。

方案二 通过频闪照相（或视频录制）记录轨迹

如图丙所示，通过频闪照片得到小球经过相等时间间隔所到达的位置，测量出经过 $T, 2T$，$3T, \cdots$ 时间小球做平抛运动的水平位移和竖直位移，分析数据得出小球水平分运动和竖直分运动的特点。

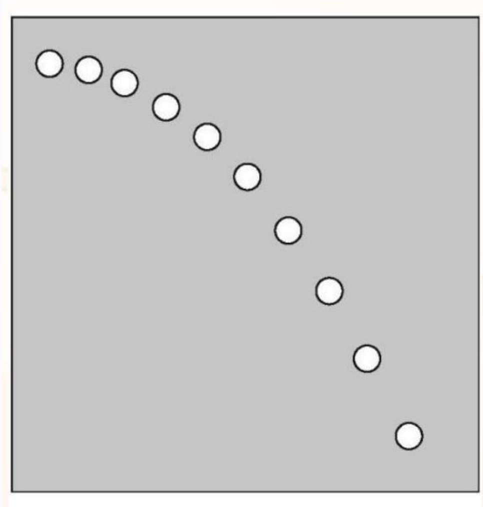


图 4: 丙

方案三 通过传感器探究平抛运动的特点

如图丁所示，物体 A 在做平抛运动，向各个方向同时发射超声波脉冲和红外线脉冲。超声一红外接收装置 B 与计算机相连，计算机可以即时给出 A 的位置坐标，分析坐标探究运动特点。

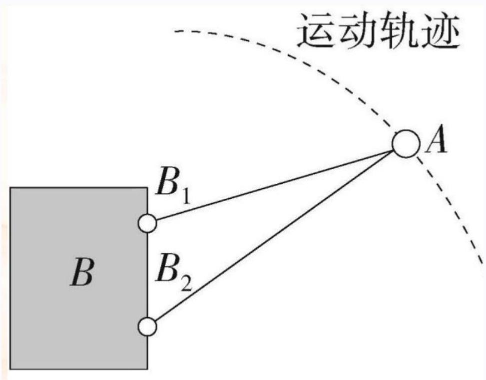
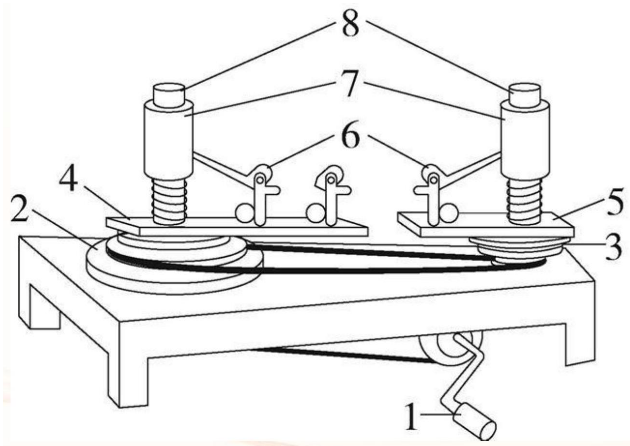


图 5: 丁

5 实验 2 探究向心力大小与半径、角速度、质量的关系

5.1 实验原理及装置图



1．手柄 2．塔轮轮 3．塔轮 4．长槽 5．短槽 6．横臂 7．套筒 8．标尺

1．调整塔轮上的皮带，使其套到半径大小不同的塔轮上，改变长、短槽旋转角速度之比。
2．将小球放在长槽不同的卡位上，改变小球做圆周运动的半径。
3．小球对挡板的作用力通过杠杆结构使弹簧测力套筒下降，露出标尺。通过标尺上等分格的数量，可以粗略计算出两个小球所需向心力的比值。

5.2 操作要领及注意事项

1．控制变量法探究
（1）使两小球的质量、转动的半径相同，探究向心力的大小跟转动的角速度的定量关系。
（2）使两小球的质量、转动的角速度相同，探究向心力的大小跟转动半径的定量关系。
（3）使两小球的转动半径、转动的角速度相同，探究向心力的大小跟质量的定量关系。
2．转速控制：摇动手柄时应缓慢加速，注意观察标尺的格数。达到预定格数时，保持转速恒定。

5.3 数据处理

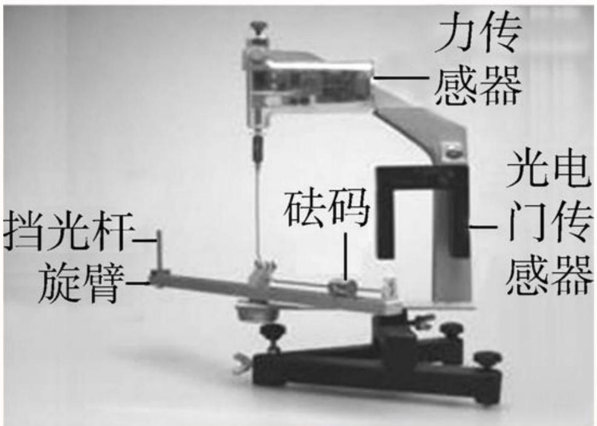
分别作出 $F_{\mathrm{n}}-\omega^2$ $F_{\mathrm{n}}-r$ $F_{\mathrm{n}}-m$ 图像，分析向心力大小与角速度、半径、质量之间的关系，并得出结论。

5.4 其他实验方案

方案一 用绳和沙袋定性研究

如图所示，在绳子的一端拴一个小沙袋（或其他小物体），另一端握在手中。将手举过头顶，使沙袋在水平面内做匀速圆周运动，此时沙袋所需向心力近似等于绳对沙袋的拉力。

方案二 用力传感器和光电门传感器探究



使用光电门传感器和力传感器，并将其接入数据采集器，根据单位时间挡光杆通过光电门传感器的次数得到角速度，系统将自动记录砝码向心力的大小 F ，从而分析出向心力与质量、转动半径、角速度的关系。