

第五章 万有引力与宇宙航行

目录

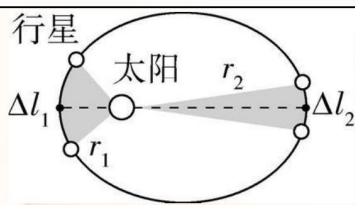
1	万有引力定律及其应用	2
1.1	开普勒行星运动定律	2
1.2	万有引力定律	3
1.3	天体质量和平均密度的计算	4
2	人造卫星 宇宙速度	6
2.1	天体和卫星运行参量的分析	6
2.2	宇宙速度	8
2.3	天体的追及问题	9
2.4	相对论时空观与牛顿力学的局限性	10
3	微专题 卫星的变轨和对接问题 双星和多星问题	11
3.1	卫星的变轨和对接问题	11
3.2	双星和多星问题	13

1 万有引力定律及其应用

1.1 开普勒行星运动定律

	内容	解释
开普勒第一定律 (轨道定律)	所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上	行星运动的轨道必有近日点和远日点
开普勒第二定律 (面积定律)	对任意一个行星来说，它与太阳的连线在相等的时间内扫过的面积相等	图片见表格下
开普勒第三定律 (周期定律)	所有行星轨道的半长轴的三次方跟它的公转周期的二次方的比都相等，即 $\frac{a^3}{T^2} = k$	同一中心天体 k 值相同，不同中心天体 k 值一般不同

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



点拨提醒

由开普勒第二定律得 $\frac{1}{2}\Delta l_1 r_1 = \frac{1}{2}\Delta l_2 r_2$ ，即 $\frac{1}{2}v_1 \Delta t \cdot r_1 = \frac{1}{2}v_2 \Delta t \cdot r_2$ ，解得 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$ ，近日点速度最大，远日点速度最小。（根据学生情况此处可以补充拓展角动量守恒）

教考衔接

典例 1（人教版必修二 P_{48} , T 改编）地球公转轨道的半径在天文学上常用来作为长度单位，叫作天文单位，用来量度太阳系内天体与太阳的距离。（这只是个粗略的说法，在天文学中，“天文单位”有严格的定义，用符号 AU 表示）

(1)（回归教材）已知火星公转的轨道半径是 1.5 AU，根据开普勒第三定律，火星公转的周期是多少个地球日？

(2)（链接高考）（2024 山东，5,3 分）“鹊桥二号”中继星环绕月球运行，其 24 小时椭圆轨道的半长轴为 a 。已知地球同步卫星的轨道半径为 r ，则月球与地球质量之比可表示为（ ）

A. $\sqrt{\frac{r^3}{a^3}}$

B. $\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}$

C. $\frac{r^3}{a^3}$

D. $\frac{a^3}{r^3}$

提分关键·规律总结: 开普勒第三定律的常数

若行星绕中心天体做圆周运动, 可得 $G\frac{Mm}{r^2} = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$, 所以 $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$, 椭圆轨道也适用关系式 $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ 。

1.2 万有引力定律

万有引力定律

表达式	$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$, 其中 G 为引力常量, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 由英国物理学家卡文迪什利用扭秤测出
适用条件	(1) 两个质点间的相互作用 (2) 对于两个质量分布均匀的球体, r 为两球心间的距离 (3) 对于质点与质量分布均匀的球体, r 为质点到球心的距离
两条推论	推论 1: 在匀质球层的空腔内任意位置处, 质点受到的万有引力的合力为 0, 即 $\sum F = 0$ 推论 2: 在匀质球体内部距离球心 r 处, 质点受到的万有引力等于半径为 r 的球体对它的引力, 即 $F' = G\frac{M'm}{r^2}$, 而 $\frac{M'}{M} = \frac{r^3}{R^3}$, 故 $F' = G\frac{Mm}{R^3}r$

万有引力与重力的关系

关系 推导	$F_{引}$ 产生两个效果: 一是提供物体随地球自转所需的向心力; 二是产生物体的重力
g 表达式 (不考虑地球自转)	(1) 在地球表面附近的重力加速度 g 满足 $mg = G\frac{Mm}{R^2}$ 得 $g = \frac{GM}{R^2}$ 。 公式 $GM = gR^2$ 又叫黄金代换式 (2) 在地球上空距离地心 $r = R + h$ 处的重力加速度为 g' , 有 $\frac{g}{g'} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$ (3) 在地球内部距离地心 r 处的重力加速度为 g'' 由万有引力定律推论 2 可得 $mg'' = \frac{GMm}{R^3}r$, 即 $g'' = \frac{GM}{R^3}r$
特殊位置	在赤道上: $G\frac{Mm}{R^2} = mg_1 + m\omega^2R$ 在两极上: $G\frac{Mm}{R^2} = mg_2$

能力进阶

典例 2 中国计划在 2030 年之前实现载人登月。已知月球的质量是地球质量的 k 倍 ($0 < k < 1$)，半径是地球半径的 k' 倍 ($0 < k' < 1$)。试求月球表面的自由落体加速度有多大？若航天员在地面上最多能举起质量为 m 的物体，他在月球表面最多能举起质量是多少的物体？（已知地表的自由落体加速度为 g ，引力常量为 G ，忽略星球自转）

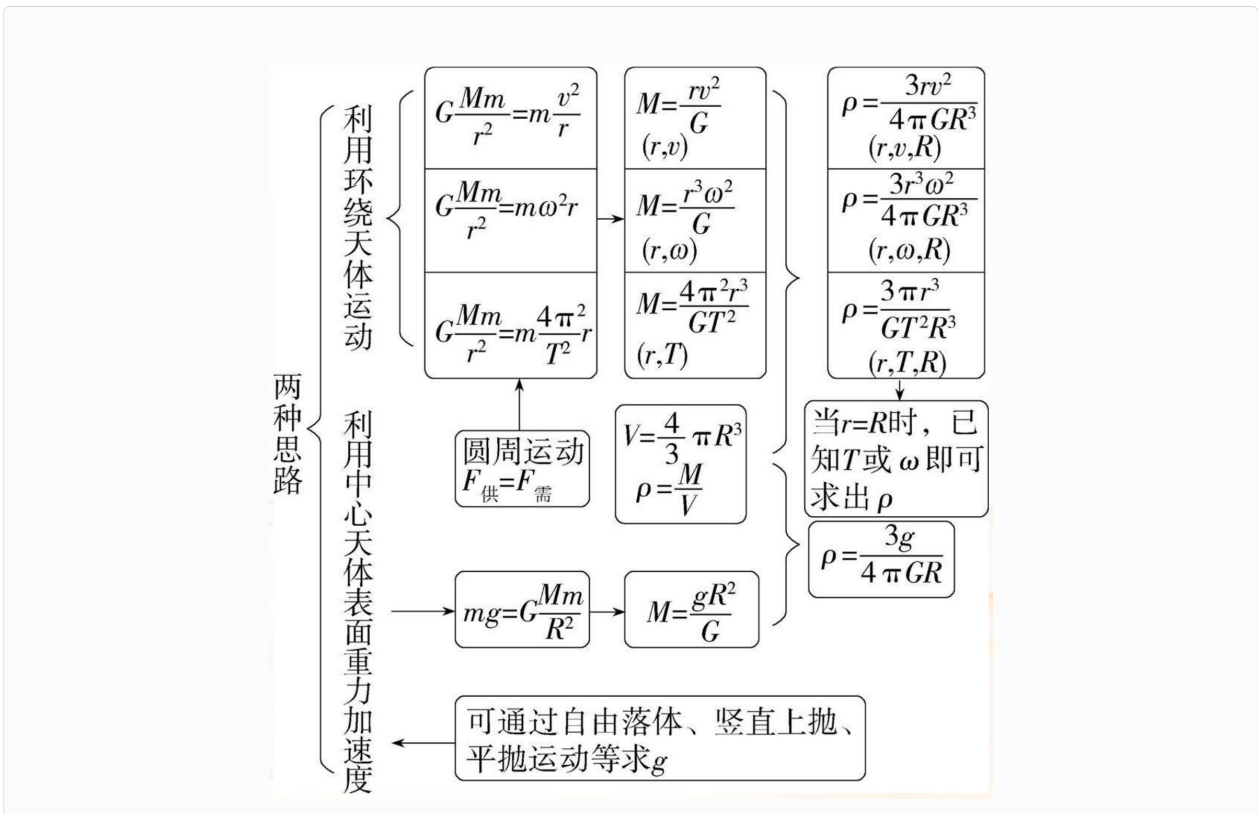
进阶 1（从星球表面到星球内部）若地球半径为 R ，把地球看成质量分布均匀的球体。“蛟龙号”下潜深度为 d ，“天宫一号”轨道距离地面高度为 h ，“蛟龙号”所在处与“天宫一号”所在处的重力加速度大小之比为（忽略星球自转）（ ）

- A. $\frac{R-d}{R+h}$ B. $\frac{(R-d)^2}{(R+h)^2}$ C. $\frac{(R-d)(R+h)^2}{R^3}$ D. $\frac{(R-d)(R+h)}{R^2}$

进阶 2（考虑星球自转）假设质量为 m 的飞船到达月球时，在距离月球表面的高度等于月球半径的 $\frac{1}{2}$ 处先绕着月球做匀速圆周运动，其周期为 T_1 ，已知月球的自转周期为 T_2 ，月球的半径为 $R_{月}$ ，引力常量为 G ，下列说法正确的是（ ）

- A. 月球两极的重力加速度为 $g_0 = \frac{27\pi^2 R_{月}}{T_1^2}$
 B. 月球的第一宇宙速度为 $v_1 = \frac{3\sqrt{3}\pi R_{月}}{2T_1}$
 C. 当飞船停在月球赤道的水平面上时，受到的支持力为 $F = \pi^2 m_{飞} R_{月} \left(\frac{27}{2T_1^2} - \frac{4}{T_2^2} \right)$
 D. 当飞船停在月球纬度 60° 的区域时，其自转向心加速度为 $a = \frac{\sqrt{3}\pi^2 R_{月}}{2T_2^2}$

1.3 天体质量和平均密度的计算



点拨提醒

- (1) 利用万有引力提供向心力估算天体质量时，估算的只是中心天体的质量。
- (2) 区别中心天体半径 R 和轨道半径 r ，只有在中心天体表面附近做圆周运动时，才有 $r \approx R$ ； $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 中的“ R ”只能是中心天体的半径。

典例 3

(2024 海南, 6, 3 分) 嫦娥六号进入环月圆轨道, 周期为 T , 轨道高度与月球半径之比为 k , 引力常量为 G , 则月球的平均密度为 ()

- A. $\frac{3\pi(1+k)^3}{GT^2k^3}$ B. $\frac{3\pi}{GT^2}$ C. $\frac{\pi(1+k)}{3GT^2k}$ D. $\frac{3\pi(1+k)^3}{GT^2}$

高考变式

(多选) 若火星可视为质量均匀分布的球体, 火星探测器“天问一号”测得火星表面的重力加速度在两极的大小为 g_1 , 在火星赤道的大小为 g_2 , 火星自转的周期为 T , 引力常量为 G , 则下列判断正确的是 ()

- A. g_2 一定小于 g_1
- B. 火星的半径可表示为 $R = \frac{(g_1 - g_2)T^2}{4\pi^2}$
- C. 火星的质量可表示为 $M = \frac{g_1(g_1 - g_2)^2 T^4}{16G\pi^4}$
- D. 火星的密度可表示为 $\rho = \frac{3\pi g_1}{GT^2(g_1 + g_2)}$

2 人造卫星 宇宙速度

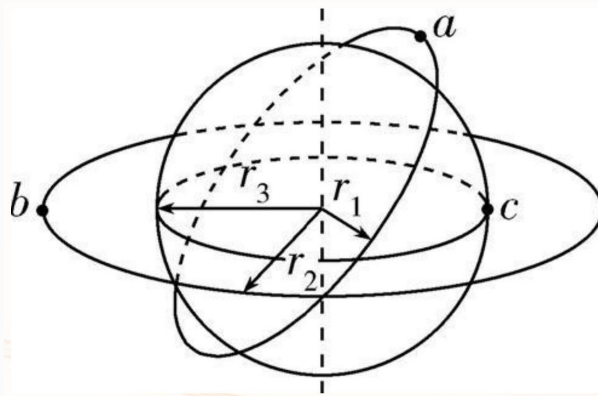
2.1 天体和卫星运行参量的分析

1. 天体运行参量随轨道半径变化的规律

$$G \frac{Mm}{r^2} = \begin{cases} m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \\ m \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \rightarrow \omega \propto \frac{1}{\sqrt{r^3}} \\ m \frac{4\pi^2}{T^2} r \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \rightarrow T \propto \sqrt{r^3} \\ ma \rightarrow a = \frac{GM}{r^2} \rightarrow a \propto \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

结论：高轨 低速 长周期

2. 地球同步卫星、近地卫星和赤道上物体的比较



	近地卫星 ($r_1 \ \omega_1 \ v_1 \ a_1$)	地球同步卫星 ($r \ \omega_2 \ v_2 \ a_2$)	赤道上随地球自转的物体 ($r_3 \ \omega_3 \ v_3 \ a_3$)
向心力来源	万有引力	万有引力	万有引力的一个分力
轨道半径	$r_2 > r_3 = r_1$		
角速度	由 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ 得 $\omega_1 > \omega_2$		$\omega_2 = \omega_3$
	$\omega_1 > \omega_2 = \omega_3$		
线速度	由 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ 得 $v_1 > v_2$		由 $v = \omega r$ 得 $v_2 > v_3$
	$v_1 > v_2 > v_3$		
向心加速度	由 $a = \frac{GM}{r^2}$ 得 $a_1 > a_2$		由 $a = \omega^2 r$ 得 $a_2 > a_3$
	$a_1 > a_2 > a_3$		

典例 1

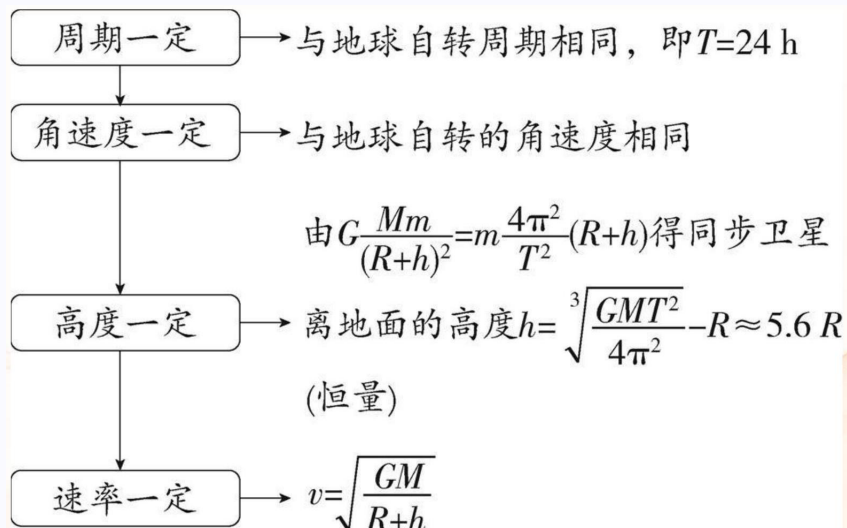
(2024 届安徽马鞍山二中月考) 如图, 某侦察卫星在赤道平面内自西向东绕地球做匀速圆周运动, 该卫星离地球静止卫星的最近距离与最远距离之比为 3 : 5 , 则下列判断正确的是 ()

- A. 该侦察卫星的角速度小于赤道上物体的角速度
- B. 该侦察卫星的运行速度小于地球静止卫星的运行速度
- C. 该侦察卫星的向心加速度小于赤道上物体的向心加速度
- D. 该侦察卫星与地心连线和地球静止卫星与地心连线在相等时间内扫过的面积之比为 1 : 2



提分关键 · 规律总结: 地球同步卫星四个”一定”

1. 轨道平面一定: 与赤道共面
2. 周期一定: $T = 24\text{h}$
3. 高度一定: $h \approx 36000\text{km}$
4. 速率一定: $v \approx 3.08\text{km/s}$



2.2 宇宙速度

宇宙速度	数值 (km/s)	意义
第一宇宙速度	7.9	发射卫星的最小速度，环绕地球的最大速度
第二宇宙速度	11.2	脱离地球引力束缚的最小发射速度
第三宇宙速度	16.7	脱离太阳系引力束缚的最小发射速度

此处可补充相对于宇宙速度，介于不同范围之间的速度的物体的运动情况

典例 2

(2024 届陕西西安关山中学期中) (多选) 2020 年我国进行了第一次火星探测，向火星发射了“天问一号”。已知火星的质量约为地球质量的 $\frac{1}{9}$ ，火星的半径约为地球半径的 $\frac{1}{2}$ 。下列关于“天问一号”的说法中正确的是 ()

- A. 发射速度只要大于第一宇宙速度即可
- B. 发射速度只有达到第三宇宙速度才可以
- C. 发射速度应大于第二宇宙速度且小于第三宇宙速度
- D. “天问一号”环绕火星运行的最大速度约为地球的第一宇宙速度的 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

教考衔接

典例 3 (人教版必修二 P_{64} , T, 改编) 金星的半径是地球半径的 95%，质量为地球质量的 82%。若忽略星球自转，已知地球表面的自由落体加速度为 g ，地球的第一宇宙速度为 v 。

(1) (回归教材) 金星表面的自由落体加速度是多大？金星的“第一宇宙速度”是多大？

(2) (链接高考) (2024 湖南, 7, 5 分) (多选) 2024 年 5 月 3 日，“嫦娥六号”探测器顺利进入地月转移轨道，正式开启月球之旅。相较于“嫦娥四号”和“嫦娥五号”，本次的主要任务是登陆月球背面进行月壤采集，并通过升空器将月壤转移至绕月运行的返回舱，返回舱再通过返回轨道返回地球。设返回舱绕月运行的轨道为圆轨道，半径近似为月球半径。已知月球表面重力加速度约为地球表面的 $\frac{1}{6}$ ，月球半径约为地球半径的 $\frac{1}{4}$ 。关于返回舱在该绕月轨道上的运动，下列说法正确的是 ()

- A. 其相对于月球的速度大于地球第一宇宙速度
- B. 其相对于月球的速度小于地球第一宇宙速度
- C. 其绕月飞行周期约为地球上近地圆轨道卫星周期的 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 倍
- D. 其绕月飞行周期约为地球上近地圆轨道卫星周期的 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 倍

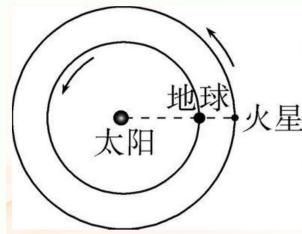
2.3 天体的追及问题

模型特征	两卫星在同一平面内同向或反向绕同一中心天体做圆周运动	
相距最近（远）	同向转动	$\omega_a t - \omega_b t = 2n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
至相距最近（远）	反向转动	$\omega_a t + \omega_b t = 2n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
相距最近至相距最远	同向转动	$\omega_a t - \omega_b t = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
	反向转动	$\omega_a t + \omega_b t = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

典例 4

(2023 湖北, 2,4 分) 2022 年 12 月 8 日, 地球恰好运行到火星和太阳之间, 且三者几乎排成一条直线, 此现象被称为“火星冲日”。火星和地球几乎在同一平面内沿同一方向绕太阳做圆周运动。火星与地球的公转轨道半径之比约为 3 : 2, 如图所示。根据以上信息可以得出 ()

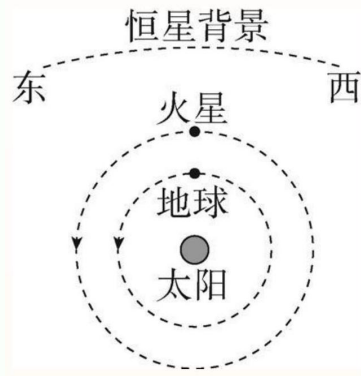
- A. 火星与地球绕太阳运动的周期之比约为 27 : 8
- B. 当火星与地球相距最远时, 两者的相对速度最大
- C. 火星与地球表面的自由落体加速度大小之比约为 9 : 4
- D. 下一次“火星冲日”将出现在 2023 年 12 月 8 日之前



高考变式 (相对运动)

如图, 火星与地球的轨道近似在同一平面内, 绕太阳沿同一方向做匀速圆周运动, 火星的轨道半径大约是地球的 1.5 倍。地球上的观测者在大多数的时间内观测到火星相对于恒星背景自西向东运动, 称为顺行; 有时观测到火星自东向西运动, 称为逆行。当火星、地球、太阳三者在同一直线上, 且太阳和火星位于地球两侧时, 称为火星冲日, 2022 年火星冲日的时间为 12 月 8 日。已知地球及地外行星绕太阳运动的轨道半径如表所示, 忽略地球自转, 只考虑太阳对行星的引力, 下列说法正确的是 ()

	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星
轨道半径 (AU)	1.0	1.5	5.2	9.5	19	30



- A. 在 2025 年一定会出现火星冲日
 B. 在冲日处，地球上的观测者观测到火星的运动为顺行
 C. 图表中的地外行星中，火星相邻两次冲日间隔时间最短
 D. 火星的公转周期是地球的 $\sqrt{\frac{8}{27}}$

2.4 相对论时空观与牛顿力学的局限性

狭义相对论的两个基本假设	相对性原理：在不同的惯性参考系中，物理规律的形式都是相同的	
	光速不变原理：真空中的光速在不同的惯性参考系中大小都是相同的	
时间延缓效应 (动钟变慢)	$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$	相对于地面以 v 运动的惯性参考系上的人观察到的时间间隔为 $\Delta \tau$ ，地面上的人观察到的时间间隔为 Δt
长度收缩效应 (动尺变短)	$l = l_0 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$	与杆相对静止的人测得杆长是 l_0 ，沿着杆的方向，以 v 相对杆运动的人测得杆长是 l

典例 5

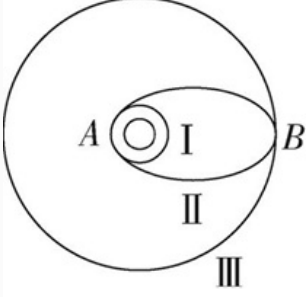
(2024 届浙江金华义乌三模) 一列火车沿平直轨道以较快的速度匀速向右行驶，观察者甲静立在车厢中，观察者乙静立在地面上。下列有关观察者的描述正确的是 ()

- A. 若车厢中央悬挂着一个正在发声的铃铛，在车厢靠近乙的过程中，乙接收到的铃声频率逐渐减小
 B. 当车速 $v = 0.9c$ 时，甲测得的车厢长度比乙测得的长
 C. 若车厢中央有一光源，则乙测得：闪光先到达前壁，后到达后壁
 D. 由相对论可知，在不同的惯性参考系中，一切物理规律的形式都是不同的

3 微专题 卫星的变轨和对接问题 双星和多星问题

3.1 卫星的变轨和对接问题

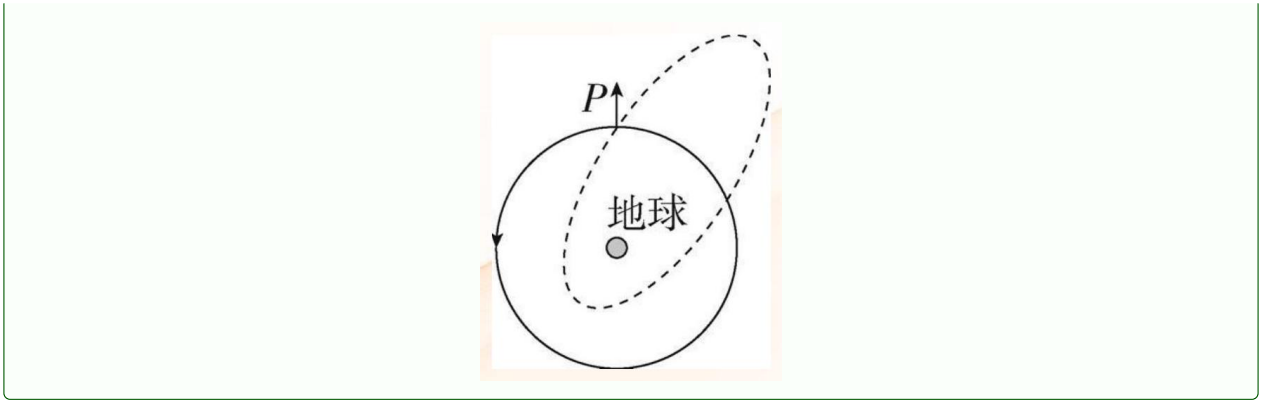
请具体推导以下所有结论

变轨原理	 <p>(1) 圆轨道 I 上 A 点点火加速，卫星离心进入椭圆轨道 II (2) 椭圆轨道 II 上 B 点点火加速，卫星进入圆轨道 III</p>
速度比较	A 点: $v_{AI} < v_{AII}$ B 点: $v_{BII} < v_{BIII}$ 圆轨道: $v_{BIII} < v_{AI}$ 联立得: $v_{BII} < v_{BIII} < v_{AI} < v_{AII}$
加速度比较	$a_{IA} = a_{IIA} > a_{IIB} = a_{IIIB}$
周期比较	$T_I < T_{II} < T_{III}$ (根据开普勒第三定律)
机械能比较	$E_I < E_{II} < E_{III}$ (同一圆轨道或椭圆轨道上机械能不变)

典例 1

(2024 湖北, 4, 4 分) 太空碎片会给航天器带来危害。设空间站在地球附近沿逆时针方向做匀速圆周运动, 如图中实线所示。为了避开碎片, 空间站在 P 点向图中箭头所指径向方向极短时间喷射气体, 使空间站获得一定的反冲速度, 从而实现变轨。变轨后的轨道如图中虚线所示, 其半长轴大于原轨道半径。则 ()

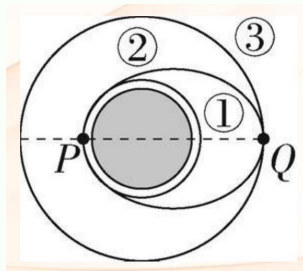
- A. 空间站变轨前、后在 P 点的加速度相同
- B. 空间站变轨后的运动周期比变轨前的小
- C. 空间站变轨后在 P 点的速度比变轨前的小
- D. 空间站变轨前的速度比变轨后在近地点的大



高考变式（变轨情境中能量与周期的计算）

2023年10月26日，我国自主研发的神舟十七号载人飞船圆满完成发射任务，与天和核心舱成功对接。神舟十七号载人飞船的发射与交会对接过程的示意图如图所示，图中（1）为近地圆轨道，其轨道半径为 R_1 ，（2）为椭圆变轨轨道，（3）为天和核心舱所在圆轨道，其轨道半径为 R_2 ， PQ 分别为（2）轨道与（1）、（3）轨道的交会点。已知神舟十七号载人飞船的引力势能大小的表达式为 $E_p = -\frac{GMm}{R}$ ，式中 R 为地心到飞船的距离， M 为地球的质量， m 为神舟十七号载人飞船的质量， G 为引力常量，地球表面的重力加速度大小为 g 。下列判断正确的是（ ）

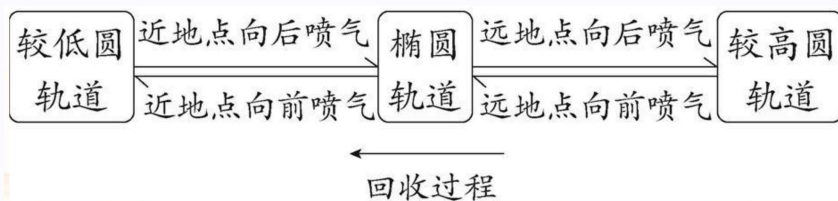
- A. 飞船在（3）轨道上运行的速度大于第一宇宙速度
- B. 飞船从（2）轨道变轨到（3）轨道需要在 Q 点减速
- C. 神舟十七号从（1）轨道转移到（3）轨道，飞船动能增大，势能增大
- D. 神舟十七号在（2）轨道上从 P 点运动到 Q 点的时间为 $t = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2g}}$



提分关键·规律总结：卫星发射与回收过程

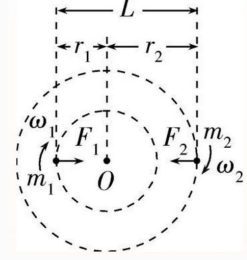
发射过程：通过多级火箭加速，使卫星达到所需轨道高度和速度

回收过程：通过减速，使卫星脱离轨道返回地球

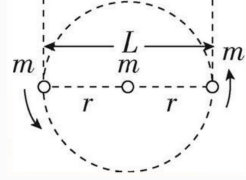
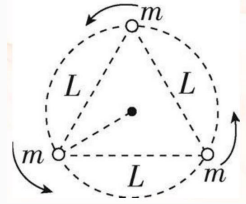
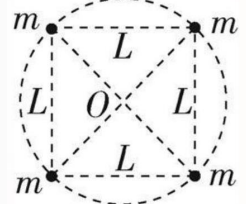
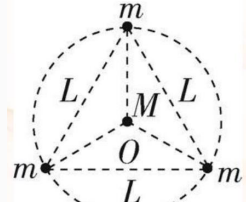


3.2 双星和多星问题

双星问题

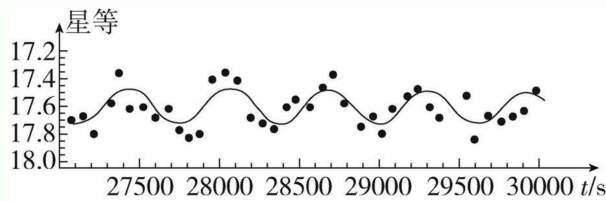
图例	
受力特点	$\frac{Gm_1m_2}{L^2} = m_1\omega^2r_1, \frac{Gm_1m_2}{L^2} = m_2\omega^2r_2$
运动特点	转动方向、周期、角速度相同，运动半径一般不等， $r_1 + r_2 = L, T = \frac{2\pi}{\omega}$
解题规律	(1) 星体质量关系: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ (2) 双星的运动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(m_1+m_2)}}$ (3) 双星的总质量 $m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2L^3}{GT^2}$

多星问题

图示	受力特点	轨道半径
	$\frac{Gm^2}{r^2} + \frac{Gm^2}{(2r)^2} = ma_n$	$r = \frac{L}{2}$
	$\frac{Gm^2}{L^2} \times \cos 30^\circ \times 2 = ma_n$	$r = \frac{L}{2 \cos 30^\circ}$
	$\frac{Gm^2}{L^2} \times 2 \cos 45^\circ + \frac{Gm^2}{(\sqrt{2}L)^2} = ma_n$	$r = \frac{\sqrt{2}}{2}L$
	$\frac{Gm^2}{L^2} \times 2 \cos 30^\circ + \frac{GMm}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}L\right)^2} = ma_n$	$r = \frac{L}{2 \cos 30^\circ}$

能力进阶

典例 2 (2024 届福建部分地市三模) (多选) 科学家最近发现了一个双星系统, 由质量约为 $0.74M_s$ (M_s 为太阳质量) 的致密白矮星与质量约为 $0.33M_s$ 的热亚矮星两颗恒星组成。它们的轨道平面几乎与地球的观测平面重合, 用望远镜观测, 发现双星系统的亮度周期性地变暗和变亮, 这是因为两个星体周期性地互相遮挡。某次观测记录该双星系统的亮度随时间 t 的变化情况如图所示, 亮度可用“星等”进行描述, 图中实线为实验数据经最佳拟合得到的正弦曲线。已知太阳质量 $M_s = 2 \times 10^{30}\text{kg}$, 引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 则 ()



- A. 该双星系统的运转周期约为 615 s
- B. 该双星系统的运转周期约为 1230 s
- C. 两星体之间的距离约为 $1.8 \times 10^6\text{m}$
- D. 两星体之间的距离约为 $1.8 \times 10^8\text{m}$

思维进阶 (双星中的拉格朗日点) 两个靠得很近的天体绕着它们连线上的一点 (质心) 做圆周运动, 构成稳定的双星系统, 双星系统运动时, 其轨道平面上存在着一些特殊的点, 在这些点处, 质量极小的物体 (例如人造卫星) 可以与两星体保持相对静止, 这样的点被称为“拉格朗日点”。如图所示, 一双星系统由质量为 M 的天体 A 和质量为 m 的天体 B 构成, 它们共同绕连线上的 O 点做匀速圆周运动, 在天体 A 和天体 B 的连线上有一个拉格朗日点 P , 已知双星间的距离为 L , 引力常量为 G , 求:

- (1) 天体 B 做圆周运动的角速度及半径;
- (2) 若 P 点距离天体 A 的距离为 $\frac{3}{5}L$, 则 m 与 M 的比值是多少?

